PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2020–2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina a y b. **(1.5 puntos)**

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla a, b y c sabiendo que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b\,\mathrm{sen}(x) + c\,\mathrm{sen}(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(1 punto)**

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.)

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & mz & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas. **(1.5 puntos)**

b) Para $m = 2$, ¿existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$. **(0.5 puntos)**

b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$ **(2 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcula su área.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m. **(1.5 puntos)**

b) Para $m = 1$, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s. **(1 punto)**
