Bloque 4: Análisis

Problemas de Optimización 2014

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

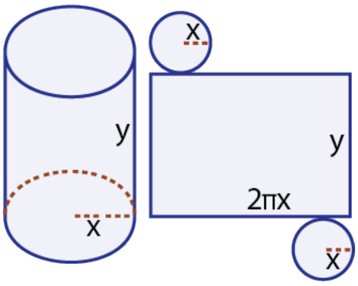
Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

[2,5 puntos] Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Realizamos un boceto para poder definir el depósito cilíndrico pedido.



F. Objetivo: Superficie mínima, al ser abierto solo debemos contabilizar una tapa, aplicamos la expresión del área de un cilindro.

$$S(x,\ y) = \pi \cdot x^2 + 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y$$

$$S(x,\ y) = \pi x^2 + 2\pi xy$$

Restricción: Su volumen sea de 125 m^3, aplicamos la expresión del volumen de un cilindro.

$$125 = \pi \cdot x^2 \cdot y$$

De la restricción despejamos la variable y, para posteriormente sustituirla en la función objetivo.

$$125 = \pi \cdot x^2 \cdot y; \;\; y = \frac{125}{\pi x^2} \rightarrow S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{125}{\pi x^2}$$

$$S(x) = \pi x^2 + \frac{250}{x}$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Calculamos $S'(x)$.

$$S(x) = \pi x^2 + \frac{250}{x}$$

$$S'(x) = 2 \cdot \pi x + \frac{0 \cdot x - 250 \cdot 1}{x^2} = 2\pi x - \frac{250}{x^2}$$

Imponemos la condición $S'(x) = 0$

$$\left. \begin{array}{rcc} S'(x) & = & 2\pi x - \dfrac{250}{x^2} \\ S'(x) & = & 0 \end{array} \right| \quad 2\pi x - \frac{250}{x^2} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2\pi x - \frac{250}{x^2} = 0; \;\; 2\pi x = \frac{250}{x^2}; \;\; 2\pi x^3 = 250$$

$$x^3 = \frac{250}{2\pi} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos propiedades de las raices} \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{\pi}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \end{array} \right] = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ sea un mínimo.

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{250}{x^2}$$

$$S''(x) = 2\pi - \frac{0 \cdot x^2 - 250 \cdot 2 \cdot x}{(x^2)^2} = 2\pi + \frac{500x}{x^4} = 2\pi + \frac{500}{x^3}$$

$$S''\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{500}{\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} = 2\pi + \frac{500}{\dfrac{125}{\pi}} = 2\pi + \frac{500\pi}{125} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0$$

Por lo tanto para $x = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la altura de nuestro cilindro.

Para $x = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \rightarrow y = \dfrac{125}{\pi \cdot \left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \dfrac{125}{\pi \cdot \dfrac{25}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \dfrac{5\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}$

Solución:

El radio y la altura del depósito cilíndrico que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\, m$ y $\dfrac{5\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}\, m$ respectivamente.

2014. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Definimos como x un número real, bajo la condición de que debe ser positivo, por lo tanto $x > 0$.

F. Objetivo: Suma con su inverso sea mínima, para un número x su inverso es $\frac{1}{x}$.

$$S(x) = x + \frac{1}{x}$$

En este problemas no encontramos restricción o relación entre ambas variables puesto que la función objetivo solo depende de una única variable.

Calculamos $S'(x)$.

$$S(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$S'(x) = 1 + \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Imponemos la condición $S'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} S'(x) & = & 1 - \frac{1}{x^2} \\ S'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$1-\frac{1}{x^2}=0;\ \ 1=\frac{1}{x^2};\ \ x^2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\left\{\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=\ \ \ 1 \end{array}\right.$$

De las dos soluciones obtenidas debemos rechazar $x_1=-1$ porque nuestro número real debe ser positivo, $x>0$, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x_2=1$ sea un mínimo.

$$S'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

$$S''(x)=0-\frac{0\cdot x^2-1\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x^4}^{\,3}}=\frac{2}{x^3}$$

$$S''(1)=\frac{2}{1^3}=2>0$$

Por lo tanto para $x=1$ tenemos nuestro mínimo.

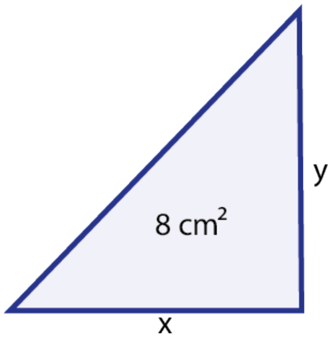
Solución:

El número real que cumple con las condiciones indicadas en el enunciado es 1.

2014. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Realizamos un boceto para poder definir el triangulo rectángulo pedido.



F. Objetivo: Hipotenusa mínima, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$
$$h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$
$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Restricción: Su área sea 8 cm^2, aplicamos la expresión del área de un triángulo.

$$8 = \frac{x \cdot y}{2}$$

De la restricción despejamos la variable y para sustituirla en la función objetivo.

$$8 = \frac{x \cdot y}{2};\ y = \frac{16}{x} \rightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2}$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Calculamos $h'(x)$.

$$h(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \cdot \left[2x + \frac{0 \cdot x^2 - 256 \cdot (2x)}{(x^2)^2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{512x}{x^4}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{512}{x^3}\right)$$

Imponemos la condición $h'(x) = 0$

$$\left.\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{512}{x^3}\right) \\ h'(x) &= 0 \end{aligned}\right| \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{512}{x^3}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \neq 0 \text{ no es posible} \\ 2x - \dfrac{512}{x^3} = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2x - \frac{512}{x^3} = 0;\ \ 2x = \frac{512}{x^3};\ \ 2x \cdot x^3 = 512;\ \ 2x^4 = 512;\ \ x^4 = \frac{512}{2};\ \ x^4 = 256$$
$$x = \pm\sqrt[4]{256} = \pm 4 \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = \ \ 4 \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $x_1 = -4$ al ser negativa, las dimensiones de los catetos de un rectángulo no pueden tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = 4$ sea un mínimo.

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{512}{x^3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{x^4}{x^2} + \frac{256}{x^2}}} \cdot \cancel{2} \cdot \left(\frac{x^4}{x^3} - \frac{256}{x^3}\right) = \frac{\frac{x^4}{x^3} - \frac{256}{x^3}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^2} + \frac{256}{x^2}}} = \frac{\frac{1}{\cancel{x^3}^{2}} \cdot (x^4 - 256)}{\frac{1}{\cancel{x}}\sqrt{x^4 + 256}}$$
$$= \frac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4 + 256}}$$

$$h''(x) = \frac{(4x^3 - 0)\cdot x^2\sqrt{x^4+256} - (x^4 - 256)\cdot\left[2x\cdot\sqrt{x^4+256} + x^2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^4+256}}\cdot 4x^3\right]}{\left(x^2\sqrt{x^4+256}\right)^2} =$$

$$= \frac{4x^5\sqrt{x^4+256} - (x^4-256)\cdot\left[2x\sqrt{x^4+256} + \frac{2x^5}{\sqrt{x^4+256}}\right]}{x^4(x^4+256)}$$

$$h''(4) = \frac{4\cdot 4^5\sqrt{4^4+256} - (4^4-256)\cdot\left[2\cdot 4\cdot\sqrt{4^4+256} + \frac{2\cdot 4^5}{\sqrt{4^4+256}}\right]}{4^4(4^4+256)} > 0$$

Por lo tanto para $x = 4$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor del cateto que nos falta.

Para $x = 4 \rightarrow y = \frac{16}{4} = 4$

Solución:

Los valores de los catetos del triangulo rectángulo que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son 4 cm cada uno de ellos.

2014. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x} + ln(x)$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).
a) [1,75 puntos] Determina el punto de la grafica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.
b) [0,75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la grafica de f en el punto de abscisas $x = 1$.

---

a) F. Objetivo: Pendiente máxima, la derivada en un punto es la pendiente de su recta tangente, por lo tanto la función objetivo coincidirá con la derivada de $f(x)$.

$$m(x) = f'(x) = \frac{0 \cdot 2x - 1 \cdot 2}{(2x)^2} + \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$$

En este problemas no encontramos restricción o ecuación de ligadura puesto que la función objetivo solo depende de una única variable.

Calculamos $m'(x)$.

$$m(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$$

$$m'(x) = -\frac{0 \cdot 2x^2 - 1 \cdot 2 \cdot 2x}{(2x^2)^2} + \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} =$$
$$= -\frac{-4x}{4x^4} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

Imponemos la condición $m'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} m'(x) & = & \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} \\ m'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} = 0$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Resolvemos la ecuación obtenida.

$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} = 0;\ \ \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2};\ \ x^2 = x^3;\ \ x^3 - x^2 = 0,$ sacamos factor común a la variable x

$$x^2 \cdot (x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0\ (doble) \\ x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas debemos rechazar $x_1 = 0$ al no encontrarse dentro del dominio, $x > 0$, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x_2 = 1$ sea un máximo.

$$m'(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$m''(x) = \frac{0 \cdot x^3 - 1 \cdot 3 \cdot x^2}{(x^3)^2} - \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2 \cdot x}{(x^2)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} + \frac{2x}{x^4} = -\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3}$$

$$m''(1) = -\frac{3}{1^4} + \frac{2}{1^3} = -1 < 0$$

En consecuencia para $x = 1$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la $f(x)$ para tener el valor de la coordenada y del punto pedido.

$$f(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} + ln(1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Solución:

El punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es $P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$.

b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 1$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) \tag{1}$$

Solamente necesitamos calcular $f(1)$ y $f'(1)$.

$f(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} + ln(1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$, ya lo teníamos calculado en el apartado anterior.

$f'(1) = m(1) = -\frac{1}{2 \cdot (1)^2} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Sustituimos los datos en en la ecuación de la recta normal (1).

$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (x - 1) \rightarrow y - \frac{1}{2} = -2 \cdot (x - 1)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - \frac{1}{2} = -2 \cdot (x - 1)\,;\;\; y = -2x + 2 + \frac{1}{2} \rightarrow y = -2x + \frac{5}{2}$

Solución:

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 1$ es $y = -2x + \frac{5}{2}$.