Bloque 4: Ánalisis

Límites 2014

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\operatorname{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\cdot \operatorname{sen}(x)}=$$

$$=\frac{\cos(3\cdot 0)-e^0+a\cdot(0)}{(0)\cdot\operatorname{sen}(0)}=$$

$$=\frac{1-1+0}{0}=\frac{0}{0}\,IND\xrightarrow{l'Hôpital}$$

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(3x)\cdot 3-e^x+a}{(1)\cdot\operatorname{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}(3x)-e^x+a}{\operatorname{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}=\frac{-3\cdot\operatorname{sen}(0)-e^0+a}{\operatorname{sen}(0)+(0)\cdot\cos(0)}=\frac{-1+a}{0}$$

Hemos obtenido el caso general de un número partido de cero, $\frac{k}{0}$, que en análisis solemos decir que se "aproxima" a infinito, pero el enunciado nos impone que el límite debe ser finito, es decir debe de dar como resultado un número, por lo tanto la única manera que no obtengamos un número partido por cero es que el propio numerador también sea cero, para ello igualaremos a cero el numerador para obtener el valor de a y así poder seguir resolviendo el límite.

$$-1+a=0\to a=1$$

Para $a=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}(3x)-e^x+1}{\operatorname{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}=\frac{0}{0}\,\text{IND}\xrightarrow{l'Hôpital}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot\cos(3x)\cdot 3-e^x}{\cos(x)+[1\cdot\cos(x)-x\cdot\operatorname{sen}(x)]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x)-e^x}{2\cos(x)-x\cdot\operatorname{sen}(x)}=\frac{-9\cdot\cos(0)-e^0}{2\cdot\cos(0)-0\cdot\operatorname{sen}(0)}=\frac{-9\cdot 1-1}{2\cdot 1+0}=-\frac{10}{2}=-5$$

Solución:

Para $a=2$ el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\operatorname{sen}(x)}=-5$

2014. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{a}{lnx}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{lnx}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{Sumamos ambas fracciones}\\ \text{para expesarla como una}\\ \text{única fracción y llegar a}\\ \text{tener una indeterminanción}\\ \text{de } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty}.\end{array}\right]=$$

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot ln(x)-a\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot ln(x)}=$$

$$=\frac{1\cdot ln(1)-a\cdot(1-1)}{(1-1)\cdot ln(1)}=\frac{0}{0}\,IND\xrightarrow{l'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left[1\cdot ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right]-a\cdot(1)}{1\cdot ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\left[\begin{array}{l}\text{Quitaremos los castillos de fracciones al finalizar el límite}\\ \text{porque si lo hacemos ahora se complicará en exceso el límite}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{ln(x)+1-a}{ln(x)+\frac{x-1}{x}}=\frac{ln(1)+1-a}{ln(1)+\frac{1-1}{1}}=\frac{0+1-a}{0}=\frac{1-a}{0}$$

Hemos obtenido el caso general de un número partido de cero, $\frac{k}{0}$, que en análisis solemos decir que se "aproxima" a infinito, pero el enunciado nos impone que el límite debe ser finito, es decir debe de dar como resultado un número, por lo tanto la única manera que no obtengamos un número partido por cero es que el propio numerador también sea cero, para ello igualaremos a cero el numerador para obtener el valor de a y así poder seguir resolviendo el límite.

$$1-a=0\to a=1$$

Para $a = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{ln\,(x) + \cancel{1} - \cancel{1}}{ln\,(x) + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{ln\,(x)}{ln\,(x) + \dfrac{x-1}{x}} = \frac{0}{0}\,\text{IND} \xrightarrow{l'Hôpital} \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{(1)\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \left[\begin{array}{c} \text{Sacamos factor común al } \dfrac{1}{x} \text{ del denominador} \\ \text{para simpificar la expresión obtenida.} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{\dfrac{1}{x}}}{\cancel{\dfrac{1}{x}}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\dfrac{1\cdot x}{x} + \dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\dfrac{x+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \left[(1) \div \left(\frac{x+1}{x} \right) \right] = \lim_{x\to 1} \frac{1\cdot x}{1\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Solución:

Para $a = 1$ el $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{a}{lnx} \right) = \dfrac{1}{2}$

2014. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{tan\,(x) - sen\,(x)}{x - sen\,(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tan\,(x) - sen\,(x)}{x - sen\,(x)} =$$

$$= \frac{tan\,(0) - sen\,(0)}{0 - sen\,(0)} = \frac{0}{0}\,IND \xrightarrow{l'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + tan^2\,(x) - cos\,(x)}{1 - cos\,(x)} = \frac{1+0-1}{1-1} = \frac{0}{0}\,IND \xrightarrow{l'Hôpital}$$

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k} \frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to k} \frac{f'\,(x)}{g'\,(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot tan\,(x) \cdot \left[1 + tan^2\,(x)\right] - \left[-sen\,(x)\right]}{-\left[-sen\,(x)\right]} = \left[\begin{array}{l} \text{Como } tan\,(x) = \dfrac{sen\,(x)}{cos\,(x)} \text{ si la sustituimos} \\ \text{podremos simplificar la expresión ahorrándonos} \\ \text{hacer un tercer l'Hôpital.} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{sen\,(x)}{cos\,(x)} \cdot \left[2 + 2tan^2\,(x)\right] + sen\,(x)}{sen\,(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{sen\,(x) \cdot \left[2 + 2tan^2\,(x)\right]}{cos\,(x)} + \dfrac{sen\,(x) \cdot cos\,(x)}{cos\,(x)}}{sen\,(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{sen\,(x) \cdot \left[2 + 2tan^2\,(x)\right] + sen\,(x) \cdot cos\,(x)}{cos\,(x)}}{sen\,(x)} = \left[\begin{array}{c} \text{Sacamos factor común a } sen\,(x) \\ \\ sen\,(x) \cdot \left[2 + 2tan^2\,(x)\right] + sen\,(x) \cdot cos\,(x) = \\ = sen\,(x) \cdot \left[2 + 2tan^2\,(x) + cos\,(x)\right] \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cancel{sen\,(x)} \cdot \left[2 + 2tan^2\,(x) + cos\,(x)\right]}{cos\,(x)}}{\cancel{sen\,(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2tan^2\,(x) + cos\,(x)}{cos\,(x)} =$$

$$= \frac{2 + 2 \cdot tan^2\,(0) + cos\,(0)}{cos\,(0)} = \frac{3+0}{1} = 3$$

Solución:

El $\lim_{x\to 0} \dfrac{tan\,(x) - sen\,(x)}{x - sen\,(x)} = 3$