Bloque 4: Ánalisis

Funciones con Parámetros 2014

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1,75 puntos] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.
b) [0,75 puntos] Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

---

a) Para poder determinarla necesitamos obtener el valor de las constantes a, b y c, así que debemos plantear 3 condiciones:

Si tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ provoca que la segunda derivada sea nula.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

Si $y = 5 - 6x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$, entonces para $x = 0$ la derivada de la función coincidirá con la pendiente de la recta tangente, en ese caso tomará el valor de -6 y además para dicho valor de x la función y su recta tangente tendrán el mismo punto en común.

> Si f tiene en $x = a$ un punto de inflexión, sabemos que $f''(a) = 0$.
>
> Si la ecuación de la recta tangente es $y = mx + n$ en $x = k$, sabemos que se trata de una condición doble:
>
> - $f'(k) = m$, puesto que la derivada de f en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva.
> - $f(k) = m \cdot (k) + n$, porque para $x = k$ la gráfica f y su recta tangente tienen el mismo punto en común.

$$f'(0) = -6 \qquad (2)$$

$$f(0) = 5 - 6 \cdot 0 = 5 \qquad (3)$$

A continuación aplicamos las tres condiciones para determinar los valores de a, b y c, pero antes de ello calculamos la primera y segunda derivada .

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

De la primera condición (1) podemos obtener el valor a.

$$\left.\begin{array}{rcc} f''(x) = & 6x+2a \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = & 6\cdot\frac{1}{2}+2a \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 6\cdot\frac{1}{2}+2a=0 \\ 3+2a=0 \\ a=-\frac{3}{2} \end{array}$$

Para $a=-\frac{3}{2}$ tenemos que $f'(x)=3x^2-3x+b$, aplicando la condición (2) determinamos b.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x) = & 3x^2-3x+b \\ f'(0) = & 3\cdot 0^2-3\cdot 0+b \\ f'(0) = & -6 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 3\cdot 0^2-3\cdot 0+b=-6 \\ 0+b=-6 \\ b=-6 \end{array}$$

Para $a=-\frac{3}{2}$ y $b=-6$ tenemos que $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c$, aplicamos la condición (3) calculamos el valor del último de los parámetros pedidos.

$$\left.\begin{array}{rc} f(x) = & x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c \\ f(0) = & 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2-6\cdot 0+c \\ f(0) = & 5 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2-6\cdot 0+c=5 \\ 0+c=5 \\ c=5 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a=-\frac{3}{2}$, $b=-6$ y $c=5$.

b) Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$ nuestra función es

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$$

Calculamos $f'(x)$:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 3x - 9 = 3x^2 + 6x - 9$

$f'(x) = 3 \cdot (x^2 + 2x - 3)$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Para poder determinarlos aplicaremos el criterio de la primera derivada para ello estudiaremos el signo de $f'(x)$.

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $[a,\ b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $[a,\ b]$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (x^2 + 2x - 3) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$3 \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente, $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$:

Intervalos	$(-\infty,\ -3)$	$(-3,\ 1)$	$(1,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

$f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty,\ -3)$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-3,\ 1)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(1,\ +\infty)$.

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos antes los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = -3$ pasamos de crecer a decrecer por lo tanto tenemos un máximo relativo, mientras que en $x = 1$ pasamos de decrecer a crecer en consecuencia tenemos un mínimo relativo.

Acabamos de obtener que para $x = -3$ tenemos un máximo relativo, mientras que para $x = 1$ la gráfica de f posee un mínimo relativo, ahora necesitamos su coordenada en el eje de ordenadas (Eje Y), para ellos calcularemos la imagen de dichos puntos sustituyéndolos en $f(x)$.

$f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 8 = 35 \rightarrow$ máximo relativo en $A(-3, 35)$

$f(1) = (1)^3 + 3 \cdot (1)^2 - 9 \cdot (1) + 8 = 3 \rightarrow$ mínimo relativo en $B(1, 3)$

Solución:

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $A(-3, 35)$.
$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $B(1, 3)$.

2014. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x=-1$ y que $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$.

Si f tiene en $x=k$ un extremo relativo sabemos que la derivada de f en dicho punto anula la derivada, $f'(k)=0$.

Para poder determinarla necesitamos obtener el valor de las constantes b, c y d, así que necesitamos plantear 3 condiciones:

Si tiene un extremo relativo en $x=-1$, nosotros sabemos que para dicho valor de x nuestra función posee un máximo o un mínimo relativo y en dichos puntos la pendiente de su recta tangente es nula al tratarse de una recta horizontal, así que

$$f'(-1)=0 \tag{1}$$

Si tiene que cumplir $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$, entonces obtenemos una condición doble que debe ser finito y su valor sea 4.

A continuación aplicamos las tres condiciones para determinar los valores de b, c y d, pero antes de ello obtendremos la primera derivada .

$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3x^2+2bx+c$

Aplicamos la condición (1), obteniendo una ecuación que relacione las variables.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x)= & 3x^2+2bx+c \\ f'(-1)= & 3\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)+c \\ f'(-1)= & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 3\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)+c=0 \\ 3-2b+c=0 \\ c-2b=-3 \end{array}$$

A continuación aplicamos la condición del límite para determinar alguna de las variables o en su defecto un sistema de ecuaciones .

$$4=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1}=\frac{1+b+c+d}{1-1}=\frac{b+c+d+1}{0}$$

Hemos obtenido el caso general de un número partido de cero, $\frac{k}{0}$, que en análisis solemos decir que se "aproxima" a infinito, pero la condición nos impone que el límite debe ser 4 por lo tanto finito, la única manera de que no obtengamos un número partido por cero es que el propio numerador también sea cero, para ello igualaremos a cero el numerador obteniendo una nueva relación entre las variables y poder seguir resolviendo el límite.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$b+c+d+1=0 \to b+c+d=-1$$

Para $b+c+d=-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1} = \frac{0}{0}\,\text{IND} \xrightarrow{l'H\hat{o}pital} \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2bx+c}{1} = 3+2b+c$$

El enunciado nos indica que el límite debe valer 4, igualaremos la solución obtenida 4 para obtener la última de las relaciones que necesitamos.

$$3+2b+c=4 \to \quad 2b+c=1$$

Ahora solo tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por $c-2b=-3$, $b+c+d=-1$ y $2b+c=1$.

$$\left\{\begin{array}{rcr} c-2b &=& -3 \\ b+c+d &=& -1 \\ 2b+c &=& 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} c &=& -3+2b \\ b+c+d &=& -1 \\ 2b+c &=& 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} c &=& -3+2b \\ b+(-3+2b)+d &=& -1 \\ 2b+-3+2b &=& 1 \end{array}\right. \to$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} c &=& -3+2b \\ 3b+d &=& 2 \\ 4b &=& 4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} c &=& -3+2b \\ 3b+d &=& 2 \\ b &=& 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} c &=& -3+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+d &=& 2 \\ b &=& 1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} c &=& -1 \\ d &=& -1 \\ b &=& 1 \end{array}\right.$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $b=1$, $c=-1$ y $d=-1$.