Bloque 4: Ánalisis

Continuidad y Derivabilidad 2014

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

a) [1,25 puntos] Calcula a y b.

b) [1,25 puntos] Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

---

a) En primer lugar analizamos los posibles puntos de discontinuidad de la gráfica de f, que serán aquellos en los que no está definida (anulan el denominador, etc...) y en los que cambia la definición de la función (donde pasamos de una función a otra). En nuestro caso solo tenemos un único punto conflicto que es aquel en el que cambia la definición de la función, $x = 1$. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos que componen la función son continuos y derivables en su dominio.

Una función f es derivable en $x = a$ si cumple:

- Es continua en $x = a$, que se verificará si y solo si:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \to \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Por lo tanto si una función es derivable en $x = a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Al indicarnos el enunciado que la función es derivable, es condición indispensable que también sea continua en dicho punto, empezamos estudiando su continuidad.

Estudiamos continuidad en $x = 1$:

$f(1) = a - 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} (a - x) = a - 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{b}{x} + \ln x\right) = \dfrac{b}{1} + \ln(1) = b$

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos una relación entre ambas variables.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a - 1 = b = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a - b = 1$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Para $a-b=1$, se verifica que $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x=1$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

$$f(x)=\begin{cases} a-x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{b}{x}+lnx & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{0\cdot x-b\cdot 1}{x^2}+\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x=1$:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} -1=-1$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{b}{x^2}\right)=\frac{1}{1}-\frac{b}{1}=1-b$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, obteniendo el valor de la variable b.

$$f'(1^-)=f'(1^+)$$
$$-1=1-b\to b=2$$

Ahora que ya conocemos el valor de b solo tenemos que sustituir en la condición de continuidad para obtener el valor del parámetro que nos falta.

$$\begin{cases} a-b &= 1 \\ b &= 2 \end{cases}\to\begin{cases} a-2 &= 1 \\ b &= 2 \end{cases}\to\begin{cases} a &= 3 \\ b &= 2 \end{cases}$$

Solución:

La gráfica de f será derivable en todo su dominio para $a=3$ y $b=2$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ nuestra función es:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} + ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Gracias al apartado anterior sabemos que para dichos valores la función es continua y derivable en todo su dominio. Para estudiar los extremos absolutos calculamos previamente sus extremos relativos, para ello necesitamos $f'(x)$ (ya calculada en el apartado anterior en función de b, solo debemos sustituirla por 2).

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, al ser una función a trozos igualamos a cero cada uno de ellos, pero solo serán validas los valores de x que se encuentren dentro de su dominio.

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Para $x \leq 1$:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -1 \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} -1 \neq 0 \\ \text{Solución no válida, es absurda} \end{array}$$

Para $x > 1$:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 0; \ \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x^2}; \ x^2 = 2x; \ x^2 - 2x = 0 \\ x \cdot (x-2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \text{ Se rechaza} \\ x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2 \text{ Se admite} \end{cases} \end{array}$$

De las dos soluciones obtenidas solo serán válidas aquellas que sean mayores a 1, $x > 1$, en consecuencia debemos de rechazar la solución $x_1 = 0$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el único punto crítico $x = 2$, junto con $x = 1$ por ser donde pasamos de una función a otra y sus extremos serán los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre 0 y e.

Intervalos	$(0,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(2,\ e)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = 2$ pasamos de decrecer a crecer en consecuencia tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen de $x = 2$ para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$$f(2) = \frac{2}{2} + ln(2) = 1 + ln(2) \approx 1{,}69 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A(2,\ 1 + ln(2))$$

Como el enunciado nos pide los extremos absolutos, valores máximos y mínimos que alcanza la función, al estar acotada estos pueden alcanzarse en los extremos de acotación, en nuestro caso $x = 0$ y $x = e$, o en los propios extremos relativos, sencillamente calcularemos la imagen de f en los extremos del intervalo dado y los compararemos con los extremos relativos, aquel que nos de la imagen con el valor más alto será nuestro máximo absoluto mientras que el más bajo será nuestro mínimo absoluto.

> Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a dicho intervalo donde f alcanza sus valores extremos absolutos.
> Para determinar los extremos absolutos o globales nos bastará con calcular las imagen de sus extremos relativos y de los extremos del intervalo, siendo su máximo y mínimo absolutos aquellas con el valor más alto y más bajo respectivamente.

$$f(0) = 3 - 0 = 3 \rightarrow \text{Máximo absoluto en el punto } B(0,\ 3)$$

$$f(e) = \frac{2}{e} + ln(e) = \frac{2}{e} - 1 \approx 1{,}73$$

Nuestro máximo absoluto se alcanza en $x = 0$, tomando un valor de 3 y el mínimo absoluto en este caso coincide con el mínimo relativo.

Solución:

$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $A(2,\ 1 + ln(2))$.
$f(x)$tiene un máximo absoluto en $B(0,\ 3)$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2014. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x<0\\ ax+b & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Calcula a y b.
b) [0,75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

---

a) En primer lugar analizamos los posibles puntos de discontinuidad de la gráfica de f, que serán aquellos en los que no está definida (anulan el denominador, etc...) y en los que cambia la definición de la función (donde pasamos de una función a otra). En nuestro caso solo tenemos un único punto conflicto que es aquel en el que cambia la definición de la función, $x=0$. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos que componen la función son continuos y derivables en su dominio.

Al indicarnos el enunciado que la función es derivable, es condición indispensable que también sea continua en dicho punto, empezamos estudiando su continuidad.

Estudiamos continuidad en $x=0$:

$f(0)=a\cdot 0+b=b$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\,\text{IND}\xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}\cdot(-1)}{2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$$

$$=\frac{1+1}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=f(0)=b$$

Una función f es derivable en $x=a$ si cumple:

- Es continua en $x=a$, que se verificará si y solo si:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim_{x\to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=b\to\lim_{x\to a} f(x)=b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-)=f'(a^+)$.

Por lo tanto si una función es derivable en $x=a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Para que sea continua debe existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos b.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = b = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to b = 1$$

Para $b = 1$, se verifica que $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x = 0$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - e^{-x}\cdot(-1))\cdot 2x - (e^x - e^{-x})\cdot 2}{(2x)^2} = \dfrac{\cancel{2}\cdot(xe^x + xe^{-x} - e^x + e^{-x})}{2\cancel{2}x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x + xe^{-x} - e^x + e^{-x}}{2x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{xe^x + xe^{-x} - e^x + e^{-x}}{2x^2} = \frac{0 - 1 + 1}{2\cdot 0} = \frac{0}{0}\,\text{IND} \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1\cdot e^x + x\cdot e^x + (1\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-1)) - e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{e^x} + xe^x \cancel{+ e^{-x}} - x\cdot e^{-x} \cancel{- e^x} \cancel{- e^{-x}}}{4x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{xe^x - x\cdot e^{-x}}{4x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}\cdot(e^x - e^{-x})}{4\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} a = a$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites y resolvemos la ecuación para obtener el valor del parámetro a.

$$f'(0^-) = f'(0^+) \to a = 0$$

Solución:

La gráfica de f será derivable en todo su dominio para $a = 0$ y $b = 1$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) \tag{1}$$

Al tratarse de una función a trozos seleccionaremos aquella que tome el valor $x = -1$, que en nuestro caso será $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$. Primero calculamos $f(-1)$.

$$f(-1) = \frac{e^{-1} - e^{-(-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{e^{-1} - e}{-2}$$

A continuación $f'(-1)$, pero para ello debemos calcular $f'(x)$, ya resuelto en el apartado a).

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \rightarrow f'(x) = \frac{xe^x + xe^{-x} - e^x + e^{-x}}{2x^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(-1) \cdot e^{-1} + (-1) \cdot e^{-(-1)} - e^{-1} + e^{-(-1)}}{2 \cdot (-1)^2} = \frac{-e^{-1} \cancel{-e} - e^{-1} \cancel{+e}}{2} = \frac{-2e^{-1}}{2} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Sustituimos en la ecuación de la recta tangente (1).

$y - \dfrac{e^{-1} - e}{-2} = -\dfrac{1}{e} \cdot (x + 1)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$$y - \frac{e^{-1} - e}{-2} = -\frac{1}{e} \cdot (x+1)\,; \quad y + \frac{e^{-1} - e}{2} = -\frac{1}{e} \cdot (x+1)\,; \quad y = -\frac{1}{e} \cdot (x+1) - \frac{e^{-1} - e}{2}$$

$$y = -\frac{x}{e} + \frac{1}{e} - \frac{e^{-1} - e}{2}; \quad y = \frac{-2x - 2 - e^{-1} \cdot e + e^2}{2e} \quad y = \frac{-2x - 2 - \frac{1}{e} \cdot e + e^2}{2e}$$

$$y = \frac{-2x - 2 - 1 + e^2}{2e}; \quad y = -\frac{2x}{2e} + \frac{e^2 - 3}{2e} \rightarrow y = -\frac{1}{e}x + \frac{e^2 - 3}{2e}$$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ es $y = -\dfrac{1}{e}x + \dfrac{e^2 - 3}{2e}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.