Bloque 4: Ánalisis

Asíntotas,

Puntos Críticos,

Monotonía y Curvatura 2014

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Considera la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

a) [0,75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1,25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0,5 puntos] Esboza la gráfica de f.

---

a) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: Al no tener problemas en el dominio no existen $A.V.$

AH: Cuando nos aparece e^x o e^{-x} es muy recomendable reescribir los límites pedidos aplicando propiedades de las potencias, para así evitar la aparición de ciertas indeterminaciones más complejas. A continuación calcularemos los siguientes límites teniendo en cuenta lo expuesto.

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos propiedades de las potencias} \\ a^b = \dfrac{1}{a^{-b}} \\ x^2 e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}\, IND \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}\cdot e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

La gráfica de f posee asíntota horizontal por la rama izquierda, al obtener 0^+ cuando x tiende a $-\infty$, sabemos que por la rama izquierda la gráfica de f se aproxima por encima de la asíntota horizontal.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

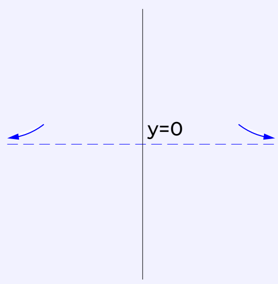
$$\lim_{x\to-\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x\to+\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.

Al trabajar con $\pm\infty$ y el número e debemos tener en cuenta:

- $x \to +\infty$ entonces e^x es $e^{+\infty} = +\infty$.
- $x \to +\infty$ entonces $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ es $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.
- $x \to -\infty$ entonces e^x es $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.
- $x \to -\infty$ entonces e^{-x} es $e^{-(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$.

Posición de la curva respecto a la AH



Repetimos exactamente el mismo proceso para $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} \; IND \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x} \cdot e^{x^2}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

La gráfica de f posee asíntota horizontal por la rama derecha, al obtener 0^+ cuando x tiende a $+\infty$, sabemos que por la rama derecha la gráfica de f se aproxima por encima de la asíntota horizontal.

Al presentar asíntota horizontal por ambos extremos no es posible que tenga asíntota oblicua.

Solución:

La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal a la gráfica de f por ambas ramas.

b) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) =$$

$$= \left[\text{ Sacamos factor común a } 2xe^{-x^2} \right] =$$

$$= 2xe^{-x^2} \cdot (1 - x^2)$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2xe^{-x^2} \cdot (1-x^2) \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; 2xe^{-x^2} \cdot (1-x^2) = 0$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2xe^{-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)=0\rightarrow\begin{cases}2\neq 0\\ x=0\\ e^{-x^2}\neq 0\\ 1-x^2=0\rightarrow x=\pm 1\end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente $x_1=-1$, $x_2=0$ y $x_3=1$.

Intervalos	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(1,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x=-1$ y $x=1$ pasamos de crecer a decrecer por lo tanto tenemos dos máximos relativos, mientras que para $x=0$ pasamos de decrecer a crecer y tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen de $x=-1$, $x=0$ y $x=1$ para obtener sus valores en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f(-1)=x^2e^{-x^2}=(-1)^2\cdot e^{-(-1)^2}=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}\rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A\left(-1,\ \frac{1}{e}\right)$$

$$f(0)=x^2e^{-x^2}=(0)^2\cdot e^{-(0)^2}=0\cdot e^{0}=0\rightarrow \text{Máximo relativo en el punto } B(0,\ 0)$$

$$f(1)=x^2e^{-x^2}=(1)^2\cdot e^{-(1)^2}=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}\rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } C\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$$

Solución:

$f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty,\ -1)$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-1,\ 0)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,\ 1)$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(1,\ +\infty)$.
$f(x)$ tiene dos mínimos relativos en $A\left(-1,\ \frac{1}{e}\right)$ y $C\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$.
$f(x)$tiene un máximo relativo en $B(0,\ 0)$

c) Para su representación es más que suficiente con la información obtenida en los apartados anteriores pero calcularemos los puntos de corte con los ejes de coordenadas para tener algún punto más y esbozarla con mayor precisión.

Punto de corte con los ejes:

Eje OX, le imponemos la condición $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función dada y resolvemos la ecuación que obtenemos:

$$x^2 e^{-x^2} = 0 \to \begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \ \ (doble) \\ e^{-x^2} \neq 0 \end{cases}$$

El punto de corte con el eje OX es $D\,(0,\ 0)$, al obtener el punto (0, 0) no es necesario calcular el punto de corte con el eje OY porque será el mismo.

Representación de la gráfica de f: