Bloque 4: Análisis

Problemas de Optimización 2012

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

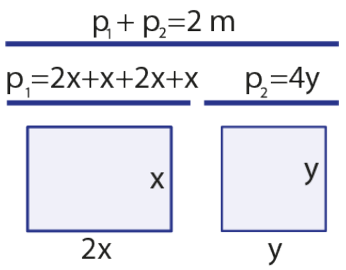
Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2012. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Un alambre 2 *metros* de longitud se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

Realizamos un boceto para poder definir el cuadrado y rectángulo.



F. Objetivo: Suma de las áreas sea mínima, usaremos las expresiones de las áreas de un cuadrado y de un rectángulo.

$$S(x,\ y) = 2x \cdot x + y^2 = 2x^2 + y^2$$

Restricción: La suma del perímetro de ambas figuras debe ser 2 m.

$$2 = p_1 + p_2 \text{ siendo}$$
$$p_1 = 2x + x + 2x + x = 6x \quad \text{y} \quad p_2 = 4y$$
$$2 = 6x + 4y$$

De la restricción despejamos la variable y, para sustituirla en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejamos una de ellas de la restricción y la sustituimos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le imponemos la condición de que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, sustituyéndolos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$2 = 6x + 4y;\ 2 - 6x = 4y;\ \ y = \frac{2-6x}{4} \longrightarrow S(x) = 2x^2 + \left(\frac{2-6x}{4}\right)^2$$

Calculamos $S'(x)$.

$$S(x) = 2x^2 + \left(\frac{2-6x}{4}\right)^2 = 2x^2 + \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2$$

$$S'(x) = 2 \cdot 2x + 2 \cdot \left(\frac{1-3x}{2}\right)^{2-1} \cdot \left(0 - \frac{3}{2}\right) + = 4x + \cancel{2} \cdot \left(\frac{1-3x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 4x - 3 \cdot \left(\frac{1-3x}{2}\right) = 4x - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}x = -\frac{3}{2} + \frac{17}{2}x$$

Imponemos la condición $S'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} S'(x) & = & -\frac{3}{2} + \frac{17}{2}x \\ S'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; -\frac{3}{2} + \frac{17}{2}x = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$-\frac{3}{2} + \frac{17}{2}x = 0; \quad -3 + 17x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{17}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \frac{3}{17}$ sea un mínimo.

$$S'(x) = -\frac{3}{2} + \frac{17}{2}x$$

$$S''(x) = 0 + \frac{17}{2} = \frac{17}{2}$$

$$S''\left(\frac{3}{17}\right) = \frac{17}{2} > 0$$

Por lo tanto para $x = \frac{3}{17}$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la otra variable.

Para $x = \frac{3}{17} \rightarrow y = \frac{2 - 6 \cdot \frac{3}{17}}{4} = \frac{\frac{16}{17}}{4} = \frac{16}{68}$

Ahora que ya conocemos las variables x e y, las sustituimos en las expresiones de p_1 y p_2 para obtener el valor de cada uno de los trozos del alambre que nos pedían.

Para $x = \frac{3}{17}$ e $y = \frac{16}{68}$ tenemos que $p_1 = 6 \cdot \frac{3}{17} = \frac{18}{17}\,m$ y $p_2 = 4 \cdot \frac{16}{68} = \frac{16}{17}\,m$

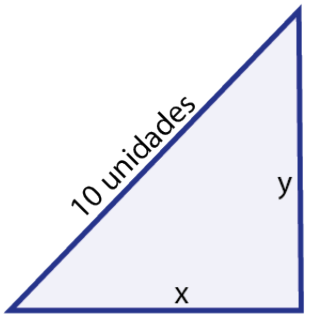
Solución:

Las dimensiones de los trozos del alambre que forman un rectángulo y un cuadrado con las condiciones impuestos en el enunciado son $\frac{18}{17}\,m$ y $\frac{16}{17}\,m$ respectivamente.

2012. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 *unidades*, determina las dimensiones del área máxima.

Realizamos un boceto para poder definir el triangulo rectángulo pedido.



F. Objetivo: Área máxima del triángulo, para determinarlo usaremos al área de un triangulo.

$$A(x,\ y) = \frac{x \cdot y}{2}$$

Restricción: Su hipotenusa sea 10 unidades, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$10^2 = x^2 + y^2$$

De la restricción despejamos la variable y, para posteriormente sustituirla en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejamos una de ellas de la restricción y la sustituimos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le imponemos la condición de que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, sustituyéndolos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$10^2 = x^2 + y^2;\ y = \sqrt{100 - x^2} \rightarrow A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$$

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{100 - x^2} \right]$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 \cdot \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{100 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right]$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left. \begin{array}{rcl} A'(x) & = & \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right] \\ A'(x) & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right] = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \neq 0 \text{ no válida} \\ \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0; \ \sqrt{100 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}; \ \left(\sqrt{100 - x^2} \right) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} \right) = x^2$$

$$\left(\sqrt{100 - x^2} \right)^2 = x^2; \ 100 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 100 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{100}{2}} = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2} \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -5\sqrt{2} \\ x_2 & = & 5\sqrt{2} \end{array} \right.$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $x_1 = -5\sqrt{2}$ al ser negativa, las dimensiones de los catetos de un rectángulo no pueden tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = 5\sqrt{2}$ sea un máximo.

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right]$$

$$A''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{100 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) - \frac{2x \cdot \sqrt{100 - x^2} - x^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{100 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)}{\left(\sqrt{100 - x^2} \right)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{2x \cdot \sqrt{100-x^2} + \dfrac{x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2} \right]$$

$$A''\left(5\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}} - \frac{2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{\left(5\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}}}{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2} \right] < 0$$

En consecuencia para $x = 5\sqrt{2}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor del cateto que nos falta.

Para $x = 5\sqrt{2} \rightarrow y = \sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}$

Solución:

Los valores de los catetos del triangulo rectángulo que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $5\sqrt{2}$ unidades cada uno de ellos.