Bloque 4: Análisis

Continuidad y Derivabilidad 2012

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2012. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea la función continua $f : R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Calcula el valor de k.
b) [1,25 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisas $x = 1$.

---

a) En primer lugar analizamos los posibles puntos de discontinuidad de la gráfica de f, que serán aquellos en los que no está definida (anulan el denominador, etc...) y en los que cambia la definición de la función (donde pasamos de una función a otra). En nuestro caso solo tenemos un único punto conflicto que es aquel en el que cambia la definición de la función, $x = 0$. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos que componen la función son continuos y derivables en su dominio.

Una función f es continua en $x = a$ si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
- Existe $\lim_{x\to a} f(x)$, para ello los limites laterales deben de coincidir, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b \to \lim_{x\to a} f(x) = b$.
- El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Estudiamos continuidad en $x = 0$:

$f(0) = 0 + k = k$

$$\lim_{x\to 0^-} (x+k) = 0 + k = k$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \frac{e^0-1}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\, IND \xrightarrow{l'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cdot e^{x^2}-0}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{2x}\cdot e^{x^2}}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2} = e^0 = 1$$

Para que sea continua debe existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos el valor de k.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = k = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to k = 1$$

Para $k = 1$, se verifica que $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x = 0$.

Solución:

La gráfica de f será continua en todo su dominio para $k = 1$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \tag{1}$$

Al tratarse de una función a trozos seleccionaremos aquella que tome el valor $x = 1$, que en nuestro caso será $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$, para poder determinarla necesitamos $f(1)$ y $f'(1)$.

$$f(1) = \frac{e^{1^2} - 1}{1^2} = e - 1$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(2x \cdot e^{x^2} - 0\right) \cdot x^2 - \left(e^{x^2} - 1\right) \cdot (2x)}{x^4} = \frac{2x^{\cancel{3}2} \cdot e^{x^2} - 2\cancel{x} \cdot e^{x^2} + 2\cancel{x}}{\cancel{x^4}^3} = \frac{2x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2} + 2}{x^3}$$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot (1)^2 \cdot e^{1^2} - 2e^{1^2} + 2}{1^3} = e - e + 2 = 2$$

Sustituimos los valores en las expresiones de la recta normal (1) para obtenerla.

$y - (e - 1) = 2 \cdot (x - 1)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - (e - 1) = 2 \cdot (x - 1)$; $y = 2x - 2 + e - 1 \rightarrow y = 2x + e - 3$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ es $y = 2x + e - 3$.

2012. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Se considera la función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a}{x-2} & \text{si} \quad x < 1 \\ a + \dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b.

En primer lugar analizamos los posibles puntos de discontinuidad de la gráfica de f, que serán aquellos en los que no está definida (anulan el denominador, etc...) y en los que cambia la definición de la función (donde pasamos de una función a otra). En nuestro caso solo tenemos un único punto conflicto que es aquel en el que cambia la definición de la función, $x = 1$. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos que componen la función son continuos y derivables en su dominio.

Una función f es derivable en $x = a$ si cumple:

- Es continua en $x = a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
  - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
  - Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para ello los límites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b \to \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
  - El límite sea igual al valor de la función, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Por lo tanto si una función es derivable en $x = a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Al indicarnos el enunciado que la función es derivable, es condición indispensable que también sea continua en dicho punto, empezamos estudiando su continuidad.

Estudiamos continuidad en $x = 1$:

$$f(1) = a + \frac{b}{\sqrt{1}} = a + b$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(1 + \frac{a}{x-2}\right) = 1 + \frac{a}{1-2} = 1 - a$$

$$\lim_{x \to 1^+} a + \frac{b}{\sqrt{x}} = a + b$$

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos una relación entre las variables.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 - a = a + b = \lim_{x \to 1^+} f(x) \to 2a + b = 1$$

Para $2a+b=1$, se verifica que $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x=1$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & \text{si} \quad x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{0\cdot(x-2)-a\cdot 1}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{0\cdot\sqrt{x}-b\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x<1 \\ -\dfrac{b}{2x\sqrt{x}} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x=1$:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} -\frac{a}{(x-2)^2}=-\frac{a}{(1-2)^2}=-a$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} -\frac{b}{2x\sqrt{x}}=-\frac{b}{2\cdot 1\sqrt{1}}=-\frac{b}{2}$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, obteniendo otra relación entre ambas variables.

$$f'(1^-)=f'(1^+)$$

$$-a=-\frac{b}{2}\to a=\frac{b}{2}$$

Ahora solo tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por $2a+b=1$ y $a=\frac{b}{2}$ para obtener el valor pedido.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+b & = & 1 \\ a & = & \frac{b}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+b & = & 1 \\ b & = & 2a \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+2a & = & 1 \\ b & = & 2a \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4a & = & 1 \\ b & = & 2a \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{4} \\ b & = & 2a \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{4} \\ b & = & 2\cdot\frac{1}{4} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{4} \\ b & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Solución:

La gráfica de f será derivable en todo su dominio para $a=\frac{1}{4}$ y $b=\frac{1}{2}$.