Bloque 4: Ánalisis

Asíntotas,

Puntos Críticos,

Monotonía y Curvatura 2012

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

TABLA DE CONTENIDO

2012. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x (x-2)$
a) [1 punto] Calcula las asíntotas de f.
b) [1 puntos Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
c) [0,5 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

---

a) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: Al no tener problemas en el dominio no existen $A.V$.

AH: Cuando nos aparece e^x o e^{-x} es muy recomendable reescribir los límites pedidos aplicando propiedades de las potencias, para así evitar la aparición de ciertas indeterminaciones más complejas. A continuación calcularemos los siguientes límites teniendo en cuenta lo expuesto.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x (x-2) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos propiedades de las potencias} \\ a^b = \dfrac{1}{a^{-b}} \\ e^x (x-2) = \dfrac{x-2}{e^{-x}} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{-(-\infty)}} = \frac{-\infty}{+\infty}\ IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{-(-\infty)}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

La gráfica de f posee asíntota horizontal por la rama izquierda, al obtener 0^- cuando x tiende a $-\infty$, sabemos que por la rama izquierda la gráfica de f se aproxima por debajo de la asíntota horizontal.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to-\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x\to+\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.

En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

Al trabajar con $\pm\infty$ y el número e debemos tener en cuenta:

- Para $x = +\infty$ entonces e^x es $e^{+\infty} = +\infty$.
- Para $x = +\infty$ entonces $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ es $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.
- Para $x = -\infty$ entonces e^x es $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.
- Para $x = -\infty$ entonces e^{-x} es $e^{-(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x (x-2) = e^{+\infty} \cdot (+\infty) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

No tiene AH por la rama derecha.

AO: No posee porque presenta AH, al no tratarse de funciones racionales, irracionales y funciones a trozos no es necesario calcular si posee asíntota oblicua para $+\infty$.

Solución:

La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal a la gráfica de f por la rama izquierda.

b) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = e^x (x-2)$$

$$f'(x) = e^x \cdot (x-2) + e^x \cdot (1-0) =$$

$$= \left[\text{ Sacamos factor común a } e^x \right] =$$

$$= e^x \cdot (x - 2 + 1) =$$

$$= e^x \cdot (x-1)$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left. \begin{array}{rcl} f'(x) & = & e^x \cdot (x-1) \\ f'(x) & = & 0 \end{array} \right| \quad e^x \cdot (x-1) = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$e^x \cdot (x-1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x \neq 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el punto crítico obtenido anteriormente $x = 1$.

Intervalos	$(-\infty,\ 1)$	$(1,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = 1$ pasamos de decrecer a crecer en consecuencia tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen $x = 1$ para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$f(1) = e^1(1-2) = e \cdot (-1) = -e \rightarrow$ Mínimo relativo en el punto $A(1,\ -e)$

Solución:

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty,\ 1)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(1,\ +\infty)$.
$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $A(1,\ -e)$.

c) Calculamos $f''(x)$:

$$f'(x) = e^x \cdot (x-1)$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot (1-0) =$$

$$= \left[\text{ Sacamos factor común a } e^x \right] =$$

$$= e^x \cdot (x - 1 + 1) =$$

$$= x \cdot e^x$$

Calculamos la curvatura y los puntos de inflexión imponiendo la condición $f''(x) = 0$.
Para poder determinar la curvatura estudiaremos el signo de $f''(x)$:

- Si $f'' > 0$ entonces f es convexa $(\bigcup)$.
- Si $f'' < 0$ entonces f es cóncava $(\bigcap)$.

En los valores de x donde pasamos de cóncava a convexa o viceversa tendremos los puntos de inflexión.

Imponemos la condición $f''(x) = 0$, para determinar los posibles puntos de inflexión:

$$\left.\begin{array}{rcl} f''(x) & = & x \cdot e^x \\ f''(x) & = & 0 \end{array}\right| \; x \cdot e^x = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$x \cdot e^x = 0 \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f''(x)$, incorporando el posible punto de inflexión $x = 0$.

Intervalos	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	Cóncava $(\bigcap)$	Convexa $(\bigcup)$

Por definición donde se produce un cambio en la curvatura (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los puntos de inflexión, en nuestro caso para $x = 0$ se produce dicho cambio y por lo tanto se trata de un punto de inflexión de f. Ahora calculamos la imagen de $x = 0$ para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$f(0) = e^0(0-2) = 1 \cdot (-2) = -2 \rightarrow$ Punto de inflexión en el punto $B(0,\ -2)$

Solución:

La gráfica de f posee un punto de inflexión en $B(0,\ -2)$.

2012. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea f la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.
a) [1,25 punto] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.
b) [1,25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Calculamos el dominio de $f(x)$:

$$dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \neq 0\}$$

$$1 - x = 0 \to \quad x = 1$$

$$dom f(x) = \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

El dominio de una función racional (que tenga x en el denominador) son todos los valores menos los que anulan el denominador. Calculamos su dominio simplemente igualando su denominador a cero y resolviendo la ecuación que obtendremos, así su dominio será todos los números reales menos las soluciones que hemos obtenido.

a) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: En funciones de cociente de polinomios sabemos que las asíntotas verticales corresponden a los valores que anulan el denominador y no anulan al numerado. En este caso solamente ocurre para $x = 1$.

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

Estudiamos los límites laterales para conocer la posición de la gráfica de f respecto a su asíntota vertical.

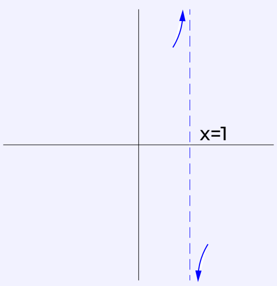
Para $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty$$

Tiene AV en $x = 1$

Posición de la gráfica respecto a la AV



AH: Cuando nos aparece e^x o e^{-x} es muy recomendable reescribir los límites pedidos aplicando propiedades de las potencias, para así evitar la aparición de ciertas indeterminaciones más complejas. A continuación calcularemos los siguientes límites teniendo en cuenta lo expuesto.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}\ IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = +\infty$$

La gráfica de f no posee asíntota horizontal por la rama derecha.

Repetimos exactamente el mismo proceso para $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos propiedades de} \\ \text{las potencias} \\ a^b = \dfrac{1}{a^{-b}} \\ \dfrac{e^{-x}}{1-x} = \dfrac{1}{e^x \cdot (1-x)} \end{array} \right] =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x \cdot (1-x)} = \frac{1}{+\infty \cdot (-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

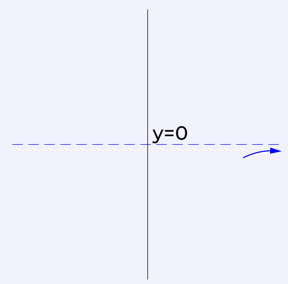
Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to -\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x \to +\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.

En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

Posición de la gráfica respecto a la AH



La gráfica de f posee asíntota horizontal por la rama derecha, al obtener 0^- cuando x tiende a $+\infty$, sabemos que por la rama izquierda la gráfica de f se aproxima por debajo de la asíntota horizontal.

Al presentar asíntota horizontal solamente por la rama derecha, debemos estudiar si posee $A.O.$ por la rama izquierda, al tratarse de funciones racionales es necesario calcular si posee asíntota oblicua para la rama donde no presente $A.H.$

AO: Tiene la forma $y = mx + n$

i) Calculamos m:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x\cdot(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x-x^2} = \frac{+\infty}{-\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1-2x} = \frac{-\infty}{-\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{-2} = \frac{e^{+\infty}}{-2} = -\infty$$

Como $m = -\infty$ no tiene asíntota oblicua.

Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f(x)$si:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, siendo $m \neq 0, \pm\infty$
- $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$

Si una f posee una AH entonces no tiene una AO, pero si no tiene AH puede tener AO.
En funciones racionales, irracionales y en funciones a trozos debemos hacer por separado los límites para $\pm\infty$porque podemos obtener resultados distintos.

Solución:

La recta $x = 1$ es asíntota vertical a la gráfica de f.
La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal a la gráfica de f por la rama derecha.

b) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot(1-x) - e^{-x}\cdot(0-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \left[\text{ Sacamos factor común a } e^{-x} \right] =$$

$$= \frac{e^{-x}\cdot(\cancel{-1} + x \cancel{+1})}{(1-x)^2} = \frac{x\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.
Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array} \left| \; \dfrac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2} = 0 \right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-x} \neq 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el punto crítico obtenido anteriormente $x = 0$ y el problema en el dominio $x = 1$.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = 1$ pasamos de decrecer a crecer y por lo tanto tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen de $x = 0$ para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$$f(1) = \frac{e^{-0}}{1-0} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A(0,\ 1)$$

Solución:

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty) \setminus \{1\}$.
$f(x)$tiene un mínimo relativo en $A(0,\ 1)$

2012. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ln\left(x^2 + 3x + 3\right) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) [1,5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisas $x = -2$.

---

a) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = ln\left(x^2 + 3x + 3\right) - x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 3} \cdot (2x + 3) - 1 =$$

$$= \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 3} - 1$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = 0$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = 0; \;\; \frac{2x+3}{x^2+3x+3} = 1; \;\; 2x+3 = 1 \cdot \left(x^2+3x+3\right); \;\; 2x\cancel{+3} = x^2 + 3x\cancel{+3}$$

$$x^2 + 3x - 2x = 0; \;\; x^2 - x = 0; \;\; x \cdot (x+1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x+1 = 0 \rightarrow x_1 = & -1 \\ x_2 = & 0 \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

Intervalos	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = -1$ pasamos de decrecer a crecer y por lo tanto tenemos un mínimo relativo, mientras que para $x = 0$ pasamos de crecer a decrecer y en consecuencia tenemos un máximo relativo. Ahora calculamos la imagen de ambos valores de x para obtener sus valores en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f(-1) = ln\left((-1)^2 + 3\cdot(-1) + 3\right) - (-1) = ln(1) + 1 = 1 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A(-1,\ 1)$$

$$f(0) = ln\left(0^2 + 3\cdot 0 + 3\right) - 0 = ln(3) \rightarrow \text{Máximo relativo en el punto } B(0,\ ln(3))$$

Solución:

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty,\ -1)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(-1,\ 0)$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0,\ +\infty)$.
$f(x)$tiene un mínimo relativo en $A(-1,\ 1)$.
$f(x)$tiene un máximo relativo en $B(0,\ ln(3))$.

b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = -2$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(-2) = -\frac{1}{f'(-2)} \cdot (x - (-2)) \tag{1}$$

Para poder determinarla necesitamos $f(-2)$ y $f'(-2)$.

$f(-2) = ln\left((-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 3\right) - (-2) = ln(1) + 2 = 2$

$f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1$

$f'(-2) = \dfrac{2 \cdot (-2) + 3}{(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 3} - 1 = \dfrac{-1}{1} - 1 = -2$

Sustituimos los valores en las expresiones de la recta normal (1) para obtenerla.

$y - (2) = -\dfrac{1}{-2} \cdot (x - (-2))\,;\; y - 2 = \dfrac{1}{2} \cdot (x+2)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - 2 = \dfrac{1}{2} \cdot (x+2)\,;\; y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \cdot 2 + 2 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 3$

Solución:

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = -2$ es $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.

2012. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea la función $f : [1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 8ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) [0,75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0,75 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

---

a) y b) Para estudiar la monotonía y los extremos relativos calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = x^2 - 8ln(x)$$

$$f'(x) = 2x - 8 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x}$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2x - \frac{8}{x} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; 2x - \frac{8}{x} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2x - \frac{8}{x} = 0; \;\; 2x = \frac{8}{x}; \;\; 2x \cdot x = 8; \;\; x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

De las dos soluciones obtenidas $x_1 = -2$ la rechazos al no pertenecer al dominio de la función indicado en el enunciado, $-2 \notin [1,\ e]$. Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el único punto crítico válido $x = 2$ y siendo sus extremos los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre 1 y e.

Intervalos	$(1,\ 2)$	$(2,\ e)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = 2$ pasamos de decrecer a crecer por lo tanto tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen para $x = 2$ para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$f(2) = 2^2 - 8ln(2) = 4 - 8ln(2) \approx -1,54 \rightarrow$ Mínimo relativo en el punto $A(2,\ 4 - 8ln(2))$

Como el enunciado nos pide los extremos absolutos, valores máximos y mínimos que alcanza la función, al estar acotada estos pueden alcanzarse en los extremos de acotación, en nuestro caso $x = 1$ y $x = e$, o en los propios extremos relativos, sencillamente calcularemos la imagen de f en los extremos del intervalo dado y los compararemos con los extremos relativos, aquel que nos de la imagen con el valor más alto será nuestro máximo absoluto mientras que el más bajo será nuestro mínimo absoluto.

Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a dicho intervalo donde f alcanza sus valores extremos absolutos.
Para determinar los extremos absolutos o globales nos bastará con calcular las imagen de sus extremos relativos y de los extremos del intervalo, siendo su máximo y mínimo absolutos aquellas con el valor más alto y más bajo respectivamente.

$f(1) = 1^2 - 8ln(1) = 1 \rightarrow$ Máximo absoluto en el punto $B(1,\ 1)$

$f(e) = e^2 - 8ln(e) = e^2 - 8 \approx -0,61$

Nuestro máximo absoluto se alcanza en $x = 1$, tomando un valor de 1 y el mínimo absoluto en este caso coincide con el mínimo relativo.

Solución:

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(1,\ 2)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(2,\ e)$.
$f(x)$ tiene un mínimo relativo que coincide con el mínimo absoluto en $A(2,\ 4 - 8ln(2))$.
$f(x)$tiene un máximo absoluto en $B(1,\ 1)$.

c) Para estudiar la curvatura calculamos $f''(x)$:

> Calculamos la curvatura y los puntos de inflexión imponiendo la condición $f''(x) = 0$.
> Para poder determinar la curvatura estudiaremos el signo de $f''(x)$:
>
> - Si $f''(x) > 0$ entonces f es convexa ($\bigcup$).
> - Si $f''(x) < 0$ entonces f es cóncava ($\bigcap$).

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{0 \cdot x - 8 \cdot 1}{x^2} =$$

$$= 2 + \frac{8}{x^2}$$

Imponemos la condición $f''(x) = 0$, para determinar los posibles puntos de inflexión:

$$\left.\begin{array}{rcl} f''(x) & = & 2 + \frac{8}{x^2} \\ f''(x) & = & 0 \end{array}\right| \; 2 + \frac{8}{x^2} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2 + \frac{8}{x^2} = 0; \;\; \frac{8}{x^2} = -2; \;\; 8 = -2x^2; \;\; x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Al no obtener ninguna solución de la ecuación obtenida estudiamos el signo de $f''(x)$ usando exclusivamente los extremos entre los que se encuentra definida, es decir entre 1 y e .

Intervalos	$(1, e)$
Signo de $f''(x)$	$f''(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	Convexa ($\bigcup$)

Solución:

$f(x)$ es convexa ($\bigcup$) en $(1, e)$.

2012. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x\left(x^2-x+1\right)$

a) [0,75 puntos] Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) [1,25 puntos] Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximo o mínimos.

c) [0,5 puntos] Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

---

a) Cuando nos aparece e^x o e^{-x} es muy recomendable reescribir los límites pedidos aplicando propiedades de las potencias, para así evitar la aparición de ciertas indeterminaciones más complejas de resolver. A continuación calculamos los límites pedidos teniendo en cuanta lo anteriormente dicho.

Al trabajar con $\pm\infty$ y el número e debemos tener en cuenta:

- Para $x=+\infty$ entonces e^x es $e^{+\infty}=+\infty$.
- Para $x=+\infty$ entonces $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ es $e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.
- Para $x=-\infty$ entonces e^x es $e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.
- Para $x=-\infty$ entonces e^{-x} es $e^{-(-\infty)}=e^{+\infty}=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(x^2-x+1\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aplicamos propiedades de las potencias}\\ a^b=\dfrac{1}{a^{-b}}\\ e^x\left(x^2-x+1\right)=\dfrac{x^2-x+1}{e^{-x}}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{e^{-x}}=\frac{+\infty}{e^{-(-\infty)}}=\frac{+\infty}{e^{+\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}IND\xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-e^{-x}}=\frac{-\infty}{-\infty}IND\xrightarrow{L'H}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(x^2-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=e^{+\infty}\cdot(+\infty)=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$$

b) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = e^x\left(x^2 - x + 1\right)$$

$$f'(x) = e^x \cdot \left(x^2 - x + 1\right) + e^x \cdot (2x - 1) =$$

$$= \left[\text{ Sacamos factor común a } e^x \right] =$$

$$= e^x \cdot \left(x^2 - x + 1 + 2x - 1\right) =$$

$$= e^x \cdot \left(x^2 + x\right)$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcc} f'(x) & = & e^x \cdot \left(x^2 + x\right) \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; e^x \cdot \left(x^2 + x\right) = 0$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$e^x \cdot \left(x^2 + x\right) = 0 \to \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 + x = 0;\ \ x \cdot (x+1) = 0 \to \begin{cases} x + 1 = 0 \to x_1 = -1 \\ x_2 = \ \ 0 \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

Intervalos	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos antes los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = -1$ pasamos de crecer a decrecer por lo tanto tenemos un máximo relativo, mientras que para $x = 0$ pasamos de decrecer a crecer y tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen de ambos valores de x para obtener su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 - (-1) + 1\right) = \frac{1}{e}\cdot(1+1+1) = \frac{3}{e} \to \text{Máximo relativo en el punto } A\left(-1,\ \frac{3}{e}\right)$$

$$f(0) = e^{0}\left((0)^2 - (0) + 1\right) = 1\cdot(0-0+1) = 1 \to \text{Mínimo relativo en el punto } B\,(0,\ 1)$$

Solución:

$f(x)$ posee un máximo relativo en el punto $A\left(-1,\ \frac{3}{e}\right)$ y un mínimo relativo en $B\,(0,\ 1)$.

c) Calculamos $f''(x)$:

Calculamos la curvatura y los puntos de inflexión imponiendo la condición $f''(x) = 0$.
Para poder determinar la curvatura estudiaremos el signo de $f''(x)$:

- Si $f'' > 0$ entonces f es convexa ($\bigcup$).
- Si $f'' < 0$ entonces f es cóncava ($\bigcap$).

En los valores de x donde pasamos de cóncava a convexa o viceversa tendremos los puntos de inflexión.

$$f'(x) = e^x\cdot\left(x^2 + x\right)$$

$$f''(x) = e^x\cdot\left(x^2+x\right) + e^x\cdot(2x+1) =$$

$$= \left[\ \text{Sacamos factor común a } e^x\ \right] =$$

$$= e^x\cdot\left(x^2 + x + 2x + 1\right) =$$

$$= e^x\cdot\left(x^2 + 3x + 1\right)$$

Imponemos la condición $f''(x) = 0$, para determinar los posibles puntos de inflexión:

$$\left.\begin{array}{rcl} f''(x) & = & e^x\cdot\left(x^2+3x+1\right) \\ f''(x) & = & 0 \end{array}\right|\ e^x\cdot\left(x^2+3x+1\right) = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$e^x\cdot\left(x^2+3x+1\right) = 0\left\{\begin{array}{l} e^x \neq 0 \\ \\ x^2+3x+1 = 0 \to x = \dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2} = \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ \\ \end{array}\right.$$

Estudiamos el signo de $f''(x)$, incorporando los puntos obtenidos anteriormente $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Intervalos	$\left(-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
Signo de $f''(x)$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\bigcup$ Convexa	$\bigcap$ Concava	$\bigcup$ Convexa

Por definición donde se produce un cambio en la curvatura (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los puntos de inflexión, en nuestro caso para $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ se produce dicho cambio y por lo tanto ambos son puntos de inflexión de f.

Solución:

El valor de las abscisas donde $f(x)$ presenta puntos de inflexión son $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

2012. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea la función $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) [1,75 puntos] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

b) [0,75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

---

a) Para estudiar los extremos absolutos empezaremos calculando previamente los extremos relativos en el intervalo indicado en el enunciado, para ello necesitamos $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{x} + ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} + \frac{1}{x} =$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Una vez calculada le imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0; \ \ \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}; \ \ 1 \cdot x = 1 \cdot x^2; \ \ x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (1 - x) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 1 - x = 0; \ \ x_2 = 1 \end{cases}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

De las dos soluciones obtenidas solo serán válidas las que pertenezcan al intervalo dado en el enunciado, en consecuencia debemos de rechazar la solución $x_1 = 0$ al no pertenecer, $0 \notin \left[\frac{1}{e}, e\right]$. A continuación estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el único punto crítico válido $x = 1$, siendo los extremos los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre $\frac{1}{e}$ y e.

Intervalos	$\left(\frac{1}{e}, 1\right)$	$(1, e)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = 1$ pasamos de decrecer a crecer por lo tanto tenemos un mínimo relativo. Ahora calculamos la imagen para $x = 1$ obteniendo su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$$f(1) = \frac{1}{1} + ln(1) = 1 - 0 = 1 \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } A(1, 1)$$

Como el enunciado nos pide los extremos absolutos, valores máximos y mínimos que alcanza la función, al estar acotada estos pueden alcanzarse en los extremos de acotación, en nuestro caso $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$, o en los propios extremos relativos, sencillamente calcularemos la imagen de f en los extremos del intervalo dado y los compararemos con los extremos relativos, aquel que nos de la imagen con el valor más alto será nuestro máximo absoluto mientras que el más bajo será nuestro mínimo absoluto.

Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a dicho intervalo donde f alcanza sus valores extremos absolutos.

Para determinar extremos absolutos o globales nos bastará con calcular las imagen de sus extremos relativos y de los extremos del intervalo, siendo su máximo y mínimo absolutos aquellas con el valor más alto y más bajo respectivamente.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} + ln\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1 \approx 1{,}718 \rightarrow \text{Máximo absoluto en el punto } B\left(\frac{1}{e}, e - 1\right)$$

$$f(e) = \frac{1}{e} + ln(e) = \frac{1}{e} + 1 \approx 1{,}368$$

Nuestro máximo absoluto se alcanza en $x = \frac{1}{e}$, tomando un valor de $e-1$ y el mínimo absoluto en este caso coincide con el mínimo relativo

Solución:

$f\left(x\right)$ tiene un mínimo absoluto en $A\left(1,\ 1\right)$.

$f\left(x\right)$tiene un máximo absoluto en $B\left(\frac{1}{e},\ e-1\right)$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=e$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f\left(e\right) = f'\left(e\right)\cdot\left(x-e\right) \tag{1}$$

Para poder obtenerla calcularemos directamente $f\left(e\right)$, y $f'(e)$ (Derivada resuelta en el apartado anterior).

$f\left(x\right) = \frac{1}{x} + ln\left(x\right) \rightarrow f\left(e\right) = \frac{1}{e} + ln\left(e\right) = \frac{1}{e} + 1$

$f'\left(x\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow f'\left(e\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$

Sustituimos los valores en las expresiones de la recta tangente (1) para obtenerla.

Siendo esta $y - \left(\frac{1}{e}+1\right) = \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)\cdot\left(x-e\right)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - \left(\frac{1}{e}+1\right) = \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)\cdot\left(x-e\right);\ y - \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e}\cdot x - \frac{1}{\cancel{e}}\cdot\cancel{e} - \frac{1}{e^2}\cdot x + \frac{1}{e^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{e}$

$y - \frac{1}{e} - \cancel{1} = \frac{x}{e} - \cancel{1} - \frac{x}{e^2} + \frac{1}{e};\ y = \frac{x}{e} - \frac{x}{e^2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \rightarrow y = \frac{2}{e} + \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)\cdot x$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=e$ es

$$y = \frac{2}{e} + \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)\cdot x$$

2012. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntota de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) [0,5 puntos] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

Calculamos el dominio de $f(x)$:

$$dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-2) \neq 0\}$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x_1 = -1 \\ x-2=0 \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$dom f(x) = \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

El dominio de una función racional (que tenga x en el denominador) son todos los valores menos los que anulan el denominador. Calculamos su dominio simplemente igualando su denominador a cero y resolviendo la ecuación que obtendremos, así su dominio será todos los números reales menos las soluciones que hemos obtenido.

a) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: En funciones de cociente de polinomios sabemos que las asíntotas verticales corresponden a los valores que anulan el denominador y no anulan al numerado. En este caso ocurre para $x = -1$ y $x = 2$.

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

Estudiamos los límites laterales para conocer la posición de la gráfica de f respecto a su asíntota vertical.

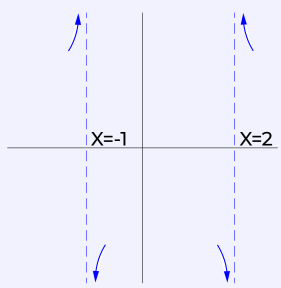
Para $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Tiene AV en $x = -1$

Posición de la gráfica respecto a la AV



Para $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Tiene AV en $x = 2$

AH:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x-1} = \frac{-\infty}{-\infty} IND \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{2} = 2$$

Tiene AH en $y = 2$ por la rama izquierda.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} IND \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2} = 2$$

Tiene AH en $y = 2$ por la rama derecha.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

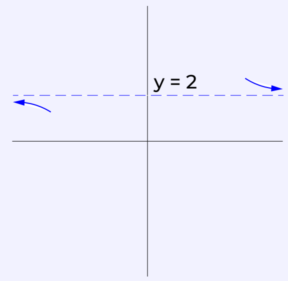
$$\lim_{x \to -\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x \to +\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.
En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

La gráfica de f posee asíntota horizontal (resultado que conocíamos de antemano, en funciones racionales irreducibles cuando el grado del polinomio del numerador es igual o menor que el polinomio que compone el denominador sabemos con certeza que tendrá asíntota horizontal) por lo tanto no es posible que tenga $A.O$.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal. Para ello haremos los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ de la gráfica de f menos la $A.H.$

Posición de la gráfica respecto a la AH



$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2}{x^2-x-2}-2\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2\cdot\left(x^2-x-2\right)}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x^2+2x+4}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{x^2-x-2}=\frac{-\infty}{+\infty}\text{IND}\xrightarrow{L'H}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2x-1}=\frac{2}{-\infty}=0^-$$

Al obtener 0^- cuando x tiende a $-\infty$, sabemos que por la rama izquierda la gráfica de f se aproxima por debajo de la asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2}{x^2-x-2}-2\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2\cdot\left(x^2-x-2\right)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x^2+2x+4}{x^2-x-2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{x^2-x-2}=\frac{+\infty}{+\infty}\text{IND}\xrightarrow{L'H}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x-1}=\frac{2}{+\infty}=0^+$$

Al obtener 0^+ cuando x tiende a $+\infty$, conocemos que por la rama derecha la gráfica de f se aproxima por encima respecto de la asíntota horizontal.

AO: No tiene porque nuestra función posee A.H.

Solución:

Las rectas $x=-1$ y $x=2$ son asíntotas verticales a la gráfica de f.
La recta $y=2$ es la asíntota horizontal a la gráfica de f.

b) Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2-x-2}$$

$$= \frac{4x \cdot (x^2-x-2) - 2x^2 \cdot (2x-1)}{(x^2-x-2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} - 4x^2 - 8x \cancel{- 4x^3} + 2x^2}{(x^2-x-2)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiamos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcc} f'(x) & = & \dfrac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2x^2-8x=0;\ \ x\cdot(-2x-8)=0 \\ -2x-8=0 \rightarrow x_1 = -4 \\ x=0 \rightarrow x_2 = 0 \end{array}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente, $x_1 = -4$, $x_2 = 0$ y los problemas en el dominio, $x = -1$ y $x = 2$:

Intervalos	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece

Solución:

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -4)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $(-4, 0) \setminus \{-1\}$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, +\infty) \setminus \{2\}$.

c) Si el sistema formado por la ecuación dada con la asíntota horizontal obtenida en el apartado a) tiene solución, dicha solución será el punto de corte entre la asíntota horizontal y la función.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{2x^2}{x^2-x-2} \\ y & = & 2 \end{array}\right| \quad \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2$$

$$2x^2 = 2 \cdot \left(x^2 - x - 2\right)$$

$$\cancel{2x^2} = \cancel{2x^2} - 2x - 4$$

$$2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

Calculamos la imagen para $x = -2$ así obtenemos la coordenada y del punto pedido, para ello sustituimos el valor de x obtenido en la función o en la propia asíntota, pero en el caso de intersección entre f y la $A.H.$ dicha coordenada siempre coincide con el valor de la $A.H.$, por lo tanto el punto pedido es $P(-2,\ 2)$.

La gráficas de f pueden llegar a cortar a las $A.H.$ y a las $A.O.$ Para determinar el punto de corte realizaremos los siguientes pasos:

- Las igualamos entre si para obtener una ecuación, si posee solución obtendremos el valor de la coordenada x del punto donde se cortan mientras que si no podemos obtener ninguna solución no existe punto de corte entre ellas.
- Una vez obtenida la coordenada x calculamos su imagen sustituyendo su valor en f o en la propia asíntota.

Solución:

El punto de corte entre la asíntota horizontal y la gráfica de f es $P(-2,\ 2)$.