Bloque 1: Matrices y Determinantes

Rango 2015

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2015. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

a) [1,5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

---

a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 2 distinta de la matriz nula, por lo tanto sabemos que su rango se encontrará comprendido entre 1 y el mínimo número de filas, columnas, que en este caso es 2.

$$1 \leq r(A) \leq 2$$

> El rango nos indica el número de filas o columnas que son independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas, al imponerle dicha condición descubriremos los valores de m para los cuales existe combinación lineal.

Mientras que la matriz B es una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula y su rango se encontrará comprendido entre 1 y 3.

$$1 \leq r(B) \leq 3$$

Pero si observamos detenidamente la matriz B, nos damos cuenta de que existe un menor de orden 2 que no depende del parámetro m, cuyo determinantes es distinto de cero, así que $r(B) \geq 2, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4 \neq 0 \rightarrow r(B) \geq 2$$

Así que el rango de la matriz B se encontrará comprendido entre $2 \leq r(B) \leq 3$.

El enunciado nos impone que deben tener el mismo rango en consecuencia la única solución posible es que ambas tengan rango 2, para ello el $|A| \neq 0$, mientras que $|B| = 0$, deberemos buscar aquellos valores que satisfagan ambas condiciones, para ello calcularemos sus determinantes y los igualaremos a cero para obtener los diferentes casos.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (-1) \cdot m - 2 \cdot 2 = -m - 4$$

Imponemos la condición $|A| = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} |A| & = & -m-4 \\ |A| & = & 0 \end{array}\right| \; -m - 4 = 0 \rightarrow m = -4$$

Para $m = -4$ el $|A| = 0$ existiendo combinación lineal y en consecuencia $r(A) = 1$, mientras que para $m \neq 4$ el $|A| \neq 0$ no existiendo dicha combinación lineal y su rango será 2.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{0} \\ -2 & m & \cancel{0} \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{m} \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & m \end{vmatrix} = m \cdot [1 \cdot m - (-2) \cdot 2] = m \cdot (m+4)$$

Imponemos la condición $|B| = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} |B| & = & m \cdot (m+4) \\ |B| & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} m \cdot (m+4) = 0 \\ m+4 = 0 \rightarrow m_1 = -4 \\ m_2 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto para $m \neq -4$ el $|A| \neq 0$, mientras que si toma los valores $m = -4$ y $m = 0$ el $|B| = 0$, siendo el único valor en común la solución del problema, es decir tendrán el mismo rango para $m = 0$.

Solución:

Para $m = 0$ el $r(A) = r(B) = 2$.

b) El enunciado nos impone que ambos determinantes deben de ser iguales.

$$|A| = |B|$$

Sencillamente igualaremos ambos determinantes, ya calculados en el apartado anterior, para obtener una ecuación que nos permitirá determinar los posibles valores de m, siempre que existan.

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -m - 4 \\ |B| = m \cdot (m+4) \end{array}\right| \begin{array}{l} -m - 4 = m \cdot (m+4) \rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \\ m = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} m_1 = -4 \\ m_2 = -1 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

Para $m = -4$ y $m = -1$ el $|A| = |B|$.

2015. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,75 puntos] Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) [0,75 puntos] Para $m = 1$, determina A^{2015}.

---

a) Tenemos una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, así que su rango se encontrará comprendido entre 1 y 3.

El rango nos indica el número de filas o columnas que son linealmente independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas.

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Para que el $r(A) \neq 3$ solo será posible si $det(A) = 0$, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el determinante de una matriz es nulo existe combinación lineal en ella, por lo tanto le impondremos dicha condición para determinar los valores del parámetro m que nos garanticen que $r(A) < 3$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & \cancel{1} & m \\ m-1 & \cancel{0} & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{1-m} & \cancel{0} \end{vmatrix} = -(1-m) \cdot \begin{vmatrix} 0 & m \\ m-1 & 2 \end{vmatrix} = -(1-m) \cdot [0 \cdot 2 - (m-1) \cdot m] =$$

$$= (1-m) \cdot (m-1) \cdot m = -m \cdot (m-1)^2$$

Imponemos la condición $|A| = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} |A| & = & -m \cdot (m-1)^2 \\ |A| & = & 0 \end{array}\right| \quad -m \cdot (m-1)^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$-m \cdot (m-1)^2 = 0 \left\{ \begin{array}{c} m_1 = 0 \\ (m-1)^2 = 0 \rightarrow m_2 = 1 \ \ (doble) \end{array} \right.$$

Ya sabemos que para $m = 0$ y $m = 1$ el rango de la matriz A es menor a 3, $r(A) < 3$, pero no podemos garantizar que sea 2, así que estudiaremos el rango de la matriz A para cada uno de los casos anteriores.

i) Para $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de m el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos un menor de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

i) Para $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de m el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos un menor de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

Solución:

Para $m = 0$ y $m = 1$ la matriz A tendrá rango 2.

b) Para $m = 1$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Si observamos detenidamente la matriz dada se trata de una matriz triangular con todos los elementos de su diagonal principal llena de ceros, en consecuencia sabemos que se trata de una matriz nilpotente, que verificará que al elevarla a un cierto número entero obtendremos la matiz nula

$$A^k = O, \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

La matriz nula es una matriz que puede ser cuadrada o rectangular que se caracteriza por estar constituida íntegramente por ceros.

$$O_{1x1} = (0)_{1x1}, O_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Una matriz nilpotente es una matriz cuadrada que al elevada a algún número entero da como resultado la matriz nula.

$$A^k = O, \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Toda Matriz triangular con ceros en su diagonal principal siempre es nilpotente.

La matriz nula tiene la propiedad de que el producto de ella por otra matriz es siempre otra matriz nula

$$A \cdot O = O \cdot A = O$$

En consecuencia $A_{3x3}^{2015} = A_{3x3}^{k} \cdot A_{3x3}^{2015-k} = \left[\text{ Como } A_{3x3}^{k} = O_{\ 3} \right] = O_3 \cdot A_{3x3}^{2015-k} = O_3$

Una forma alternativa de determinar A^{2015} sin darnos cuenta de lo anterior es buscar una progresión en los elementos que la componen o comprobar si nuestra matriz es cíclica, para ello calcularemos A^2, A^3 y A^4.

> Uno de los métodos para calcular la matriz enésima consiste en buscar un patrón, es decir que encontremos una progresión en los coeficientes de la propia matriz, o bien que nuestra matriz sea cíclica y cada cierto número de multiplicaciones nos aparezca la misma matriz. Para descubrirlo nos bastará con calcular A^2, A^3 y A^4. Si no fueras capaces de descubrirlo buscaríamos otro método para obtenerlo.

$$A^2 = A_{3x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^3 = A_{3x3} \cdot A_{3x3} \cdot A_{3x3} = A_{3x3}^2 \cdot A_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} = O_3, \text{ hemos obtenido la matriz nula de orden 3.}$$

A partir de aquí no seguimos calculando al obtener la matriz nula, aquella matriz cuyos elementos son todos ceros, porque al multiplicar una matriz por la matriz nula el resultado siempre es una matriz llena de ceros, es decir otra matriz nula

$$A \cdot O = O \cdot A = O$$

Por lo tanto como $A^3 = O_3$ se cumple

$$A^4_{3x3} = A^3_{3x3} \cdot A_{3x3} = O_3 \cdot A_{3x3} = O_3$$

$$A^5_{3x3} = A^4_{3x3} \cdot A_{3x3} = O_3 \cdot A_{3x3} = O_3$$

$$\vdots$$

$$A^{2015}_{3x3} = A^{2014}_{3x3} \cdot A_{3x3} = O_3 \cdot A_{3x3} = O_3$$

Solución:

La matriz es $A^{2015}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} = O_3$