Bloque 1: Matrices y Determinantes

Matriz

N-esima 2015

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2015. SUPLENTE SEPTEIMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,75 puntos] Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) [0,75 puntos] Para $m = 1$, determina A^{2015}.

a) Tenemos una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, así que su rango se encontrará comprendido entre 1 y 3.

> El rango nos indica el número de filas o columnas que son linealmente independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas.

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Para que el $r(A) \neq 3$ solo será posible si $det(A) = 0$, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el determinante de una matriz es nulo existe combinación lineal en ella, por lo tanto le impondremos dicha condición para determinar los valores del parámetro m que nos garanticen que $r(A) < 3$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & \cancel{1} & m \\ m-1 & \cancel{0} & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{1-m} & \cancel{0} \end{vmatrix} = -(1-m) \cdot \begin{vmatrix} 0 & m \\ m-1 & 2 \end{vmatrix} = -(1-m) \cdot [0 \cdot 2 - (m-1) \cdot m] =$$

$$= (1-m) \cdot (m-1) \cdot m = -m \cdot (m-1)^2$$

Imponemos la condición $|A| = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcc} |A| & = & -m \cdot (m-1)^2 \\ |A| & = & 0 \end{array}\right| \; -m \cdot (m-1)^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$-m \cdot (m-1)^2 = 0 \left\{ \begin{array}{c} m_1 = 0 \\ (m-1)^2 = 0 \to m_2 = 1 \;\; (doble) \end{array} \right.$$

Ya sabemos que para $m = 0$ y $m = 1$ el rango de la matriz A es menor a 3, $r(A) < 3$, pero no podemos garantizar que sea 2, así que estudiaremos el rango de la matriz A para cada uno de los casos anteriores.

i) Para $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de m el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos un menor de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0 \to r(A) = 2$$

i) Para $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de m el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos un menor de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2 \neq 0 \to r(A) = 2$$

Solución:

Para $m = 0$ y $m = 1$ la matriz A tendrá rango 2.

b) Para $m = 1$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Si observamos detenidamente la matriz dada se trata de una matriz triangular con todos los elementos de su diagonal principal llena de ceros, en consecuencia sabemos que se trata de una matriz nilpotente, que verificará que al elevarla a un cierto número entero obtendremos la matiz nula

$$A^k = O, \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

La matriz nula es una matriz que puede ser cuadrada o rectangular que se caracteriza por estar constituida íntegramente por ceros.

$$O_{1x1} = (0)_{1x1}, O_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Una matriz nilpotente es una matriz cuadrada que al elevada a algún número entero da como resultado la matriz nula.

$$A^k = O, \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Toda Matriz triangular con ceros en su diagonal principal siempre es nilpotente.

La matriz nula tiene la propiedad de que el producto de ella por otra matriz es siempre otra matriz nula

$$A\cdot O = O\cdot A = O$$

En consecuencia $A^{2015}_{3x3} = A^{k}_{3x3}\cdot A^{2015-k}_{3x3} = \left[\text{ Como } A^{k}_{3x3} = O_{\ 3}\right] = O_3\cdot A^{2015-k}_{3x3} = O_3$

Una forma alternativa de determinar A^{2015} sin darnos cuenta de lo anterior es buscar una progresión en los elementos que la componen o comprobar si nuestra matriz es cíclica, para ello calcularemos A^2, A^3 y A^4.

Uno de los métodos para calcular la matriz enésima consiste en buscar un patrón, es decir que encontremos una progresión en los coeficientes de la propia matriz, o bien que nuestra matriz sea cíclica y cada cierto número de multiplicaciones nos aparezca la misma matriz. Para descubrirlo nos bastará con calcular A^2, A^3 y A^4. Si no fueras capaces de descubrirlo buscaríamos otro método para obtenerlo.

$$A^2 = A_{3x3}\cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0\end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^3 = A_{3x3}\cdot A_{3x3}\cdot A_{3x3} = A^2_{3x3}\cdot A_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0\end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3} = O_3,$$ hemos obtenido la matriz nula de orden 3.

A partir de aquí no seguimos calculando al obtener la matriz nula, aquella matriz cuyos elementos son todos ceros, porque al multiplicar una matriz por la matriz nula el resultado siempre es una matriz llena de ceros, es decir otra matriz nula

$$A \cdot O = O \cdot A = O$$

Por lo tanto como $A^3 = O_3$ se cumple

$$A^4_{3x3} = A^3_{3x3} \cdot A_{3x3} = O_3 \cdot A_{3x3} = O_3$$

$$A^5_{3x3} = A^4_{3x3} \cdot A_{3x3} = O_3 \cdot A_{3x3} = O_3$$

$$\vdots$$

$$A^{2015}_{3x3} = A^{2014}_{3x3} \cdot A_{3x3} = O_3 \cdot A_{3x3} = O_3$$

Solución:

La matriz es $A^{2015}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} = O_3$