Bloque 1: Matrices y Determinantes

Ecuaciones

Matriciales 2015

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2015. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1,5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$, $(A^t$ es la traspuesta de $A)$.
b) [1 punto] Calcula el determinante de $B^{-1}\left(C^tC\right)B$, $(C^t$ es la traspuesta de $C)$.

---

a) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$$

Como A^t se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por $\left(A^t\right)^{-1}$.

$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C \rightarrow \left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot B^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C$

Como $\left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t = I \rightarrow I \cdot X \cdot B^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C$

y $\quad I \cdot X = X \rightarrow X \cdot B^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C$

Para despejar la matriz X de una ecuación matricial aplicaremos fundamentalmente las siguientes propiedades:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$, las matrices no tiene propiedad conmutativa.
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, al multiplicar una matriz por su inversa obtenemos la matriz identidad.
- $I \cdot A = A \cdot I = A$, al multiplicar una matriz cuadrada por la matriz identidad del mismo orden obtendremos la misma matriz.

A continuación multiplicamos por derecha de ambos miembros de la ecuación por la matriz B, debido a que B^{-1} se encuentra a la derecha de la matriz X.

$X \cdot B^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \rightarrow X \cdot B^{-1} \cdot B = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B$

Como $B^{-1} \cdot B = I \rightarrow X \cdot I = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B$

y $\quad X \cdot I = X \rightarrow X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $\left(A^t\right)^{-1}$, y posteriormente $\left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B$.

Antes de nada comprobaremos que A^t tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$\left|A^t\right| = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \exists \left(A^t\right)^{-1}$$

Como $\left|A^t\right| \neq 0$ tienen inversa, como $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$ entonces calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

Por las propiedades de los determinantes sabemos que el determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de sus traspuesta.

$$|A| = \left|A^t\right|$$

La inversa de la la traspuesta de una matriz invertible coincide con la traspuesta de su inversa.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$$

$$\left(A^t\right)^{-1} = \frac{1}{|A|} cof\,(A) \qquad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot 2 \\ (-1)^{2+1} \cdot 2 & (-1)^{2+2} \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa que necesitamos.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $\left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 10 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x2} = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$.

b) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

Solo se puede calcular el determinante de matrices cuadradas, por tanto el determinante de C o C^t no podemos calcularlo, pero si realizamos el producto de ambas matrices obtendremos una matriz cuadrada, porque siempre que multiplicamos una matriz por su traspuesta obtendremos una matriz cuadrada, a la cual si podremos calcularle su determinante.

$$\left|B^{-1}\left(C^tC\right)B\right| = \left[\begin{array}{l}\text{Denotamos } D_{3x3} \text{ a la matriz}\\ \text{obtenida del producto de las}\\ \text{matrices } C^t\text{y } C\text{, es decir}\\ D_{3x3} = C^t_{3x2}\cdot C_{2x3}.\end{array}\right] =$$

$$= \left|B^{-1}\cdot D\cdot B\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto}\\ \text{de dos matrices cuadrada del}\\ \text{mismo orden es igual al}\\ \text{producto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$= \left|B^{-1}\right|\cdot|D|\cdot|B| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual}\\ \text{a la inversa de su determinante:}\\ B\cdot B^{-1} = I; \left|B\cdot B^{-1}\right| = |I|\,; |B|\cdot\left|B^{-1}\right| = |I|\\ \text{como } |I|=1 \rightarrow \left|B^{-1}\right| = \dfrac{1}{|B|}\end{array}\right] = \frac{1}{\cancel{|B|}}\cdot|D|\cdot\cancel{|B|} = |D| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Calculamos } D_{3x3}:\\ D = C^t_{3x2}\cdot C_{2x3} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{3x2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 5 & 0\end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix}2 & -5 & 0\\ -5 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{3x3}\\ |D| = \begin{vmatrix}2 & -5 & 0\\ -5 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0\end{array}\right] = 0$$

Solución:

El $\left|B^{-1}\left(C^tC\right)B\right| = 0$.

2015. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

[2,5 puntos] Halla la matriz X que verifica la igualdad $AXA^{-1} + B = CA^{-1}$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1}$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A \cdot X \cdot A^{-1} + B = C \cdot A^{-1} \to A \cdot X \cdot A^{-1} = C \cdot A^{-1} - B$$

Como A^{-1} se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A.

Para despejar la matriz X de una ecuación matricial aplicaremos fundamentalmente las siguientes propiedades:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$, las matrices no tiene propiedad conmutativa.
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, al multiplicar una matriz por su inversa obtenemos la matriz identidad.
- $I \cdot A = A \cdot I = A$, al multiplicar una matriz cuadrada por la matriz identidad del mismo orden obtendremos la misma matriz.

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = C \cdot A^{-1} - B \to A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A = \left(C \cdot A^{-1} - B\right) \cdot A \to A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A = C \cdot A^{-1} \cdot A - B \cdot A$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \to A \cdot X \cdot I = C \cdot I - B \cdot A$$

$$\text{y} \quad \begin{array}{l} I \cdot X = X \\ C \cdot I = C \end{array} \quad \to \quad A \cdot X = C - B \cdot A$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = C - B \cdot A \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \to I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \to X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, $C - B \cdot A$ y posteriormente $A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$.

Antes de nada comprobaremos que A tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \cancel{0} \\ -1 & -3 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1)] = -1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \qquad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener su inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $C - B \cdot A$

$$C - (B \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-1 & -1-1 & 2-0 \\ 0-1 & 0-1 & -1-(-1) \\ 1-(-1) & 0-(-5) & -1-(-3) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot (C - B \cdot A)$ para obtener la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 2 & 3\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 5 & 3\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 2 \\ -1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 2 & -1\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 0\cdot 5 & -1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 1\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + 1\cdot 5 & 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{3x3}$

2015. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2AX = B$.
b) [1,5 puntos] Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2YB^{-1} = A$.

a) Aplicamos determinantes a ambos miembros de la ecuación.

$$\left|X^2 \cdot A \cdot X\right| = |B|$$

El determinante de una matriz da como resultado un escalar, en consecuencia en una ecuación lo trataremos como un número, haciendo posible operaciones que no son válidas con las matrices.

Como $X^2 = X \cdot X$ y el determinante del producto de tres matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes tenemos.

$$|X \cdot X \cdot A \cdot X| = |B|$$
$$|X| \cdot |X| \cdot |A| \cdot |X| = |B|$$
$$|X|^3 \cdot |A| = |B| \qquad (1)$$

Calculamos $|A|$ y $|B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 8$$

Ahora sustituimos los valores de los determinantes calculados y despejamos de la ecuación (1) el $|X|$.

$$|X|^3 \cdot |A| = |B|$$
$$|X|^3 \cdot (-1) = 8$$
$$|X|^3 = -8 \rightarrow |X| = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Solución:

El $|X| = -2$

b) Despejamos la matriz Y de la siguiente ecuación matricial:

$$A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} = A$$

Como B^{-1} se encuentra a la derecha de la matriz Y, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por B.

$$A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} = A \rightarrow A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} \cdot B = A \cdot B \rightarrow$$

$$\text{Como } B^{-1} \cdot B = I \rightarrow A^2 \cdot Y \cdot I = A \cdot B$$

$$\text{y} \quad Y \cdot I = Y \quad \rightarrow \quad A^2 \cdot Y = A \cdot B$$

Denotaremos C a la matriz obtenida de realizar la operación A^2.

$$\begin{aligned} C &= A^2 = A \cdot A \\ C \cdot Y &= \quad A \cdot B \end{aligned}$$

Como C se encuentra a la izquierda de la matriz Y, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por C^{-1}.

$$C \cdot Y = A \cdot B \rightarrow C^{-1} \cdot C \cdot Y = C^{-1} \cdot (A \cdot B)$$

$$\text{Como } C^{-1} \cdot C = I \rightarrow I \cdot Y = C^{-1} \cdot (A \cdot B)$$

$$\text{y} \quad I \cdot Y = Y \rightarrow Y = C^{-1} \cdot (A \cdot B)$$

La matriz Y es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$Y = C^{-1} \cdot (A \cdot B)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos C^{-1},$A \cdot B$ y posteriormente $C^{-1} \cdot (A \cdot B)$.

Antes de nada comprobaremos que C tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero, para ello calcularemos nuestra matriz C.

$$C_{2x2} = A^2_{2x2} = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \neq 0 \rightarrow \exists C^{-1}$$

Como $|C| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(C)^{-1} = \frac{1}{|C|} (cof\ (C))^t \tag{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow cof\ (C) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 3 & (-1)^{1+2} \cdot 2 \\ (-1)^{2+1} \cdot 4 & (-1)^{2+2} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (C))^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (2) para obtener la inversa que necesitamos.

$$C^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A \cdot B$

$$A_{2x2} \cdot B_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $C^{-1} \cdot (A \cdot B)$ para obtener la matriz Y.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 + (-4) \cdot 8 & 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \\ -2 \cdot 12 + 3 \cdot 8 & -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $Y_{2x2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$

2015. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1,75 puntos] Halla la matriz X que verifica $AX - B = I$, (I denota la matriz identidad de orden 3).
b) [0,75 puntos] Calcula el determinante de la matriz $\left(A^2B^{-1}\right)^{2015}$.

---

a) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X - B = I$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$A \cdot X - B = I \to A \cdot X = I + B$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

Para despejar la matriz X de una ecuación matricial aplicaremos fundamentalmente las siguientes propiedades:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$, las matrices no tiene propiedad conmutativa.
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, al multiplicar una matriz por su inversa obtenemos la matriz identidad.
- $I \cdot A = A \cdot I = A$, al multiplicar una matriz cuadrada por la matriz identidad del mismo orden obtendremos la misma matriz.

$A \cdot X = I + B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (I + B)$

Como $A^{-1} \cdot A = I \to I \cdot X = A^{-1} \cdot (I + B)$

y $\quad I \cdot X = X \to X = A^{-1} \cdot (I + B)$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot (I + B)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, $I + B$ y posteriormente $A^{-1} \cdot (I + B)$.
Antes de nada comprobaremos que A tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - F_1} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{0} & 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 2 \neq 0 \to \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|}(cof\,(A))^t \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener su inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $I + B$.

$$I_{3x3} + B_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

Dos matrices se podrán sumar solamente si ambas tienen la misma dimensión. Para realizar la operación sencillamente sumaremos cada uno de los elementos que ocupan la misma posición.

$$= \begin{pmatrix} 1+(-1) & 0+1 & 1+0 \\ 0+1 & 1+(-1) & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 & 1+(-1) \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot (I + B)$ para obtener la matriz X.

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 6 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 6 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & -6 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & -6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

A^n es el n veces el producto de A, es decir $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$, por lo tanto $(A \cdot B)^n$ es n veces el producto de ambas matrices $(A \cdot B)^n = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) \cdots (A \cdot B)$.

$$\left|\left(A^2 \cdot B^{-1}\right)^{2015}\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto} \\ \text{de dos matrices cuadrada del} \\ \text{mismo orden es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{|A| \cdot |A| \cdots |A|}_{\text{4030 veces}} \cdot \overbrace{\left|B^{-1}\right| \cdot \left|B^{-1}\right| \cdots \left|B^{-1}\right|}^{\text{2015 veces}} =$$

$$= |A|^{4030} \cdot \left|B^{-1}\right|^{2015} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual} \\ \text{a la inversa de su determinante:} \\ B \cdot B^{-1} = I; \left|B \cdot B^{-1}\right| = |I|\,; |B| \cdot \left|B^{-1}\right| = |I| \\ \text{como } |I|=1 \rightarrow \left|B^{-1}\right| = \dfrac{1}{|B|}\end{array}\right] = |A|^{4030} \cdot \frac{1}{|B|^{2015}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Calculamos } |B| : \\ |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+F_1} \begin{vmatrix} \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 0 & 2 \\ \cancel{0} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [0-4] = 4\end{array}\right] =$$

$$= 2^{4030} \cdot \frac{1}{4^{2015}} = \frac{2^{4030}}{(2^2)^{2015}} = \frac{2^{4030}}{2^{4030}} = 1$$

Solución:

El $\left|\left(A^2 \cdot B^{-1}\right)^{2015}\right| = 1$.