Bloque 2: Sistema de Ecuaiones Lineales

Discusión de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2015

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2015. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} \lambda x + y - z & = & -1 \\ \lambda x + \lambda z & = & \lambda \\ x + y - \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.
b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{array}\right. \to (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro λ en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de λ que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{} \begin{vmatrix} \cancel{\lambda} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \lambda & \cancel{0} & \lambda \\ 1-\lambda & \cancel{0} & -\lambda+1 \end{vmatrix} = -(1)\cdot \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -\lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot [\lambda \cdot (-\lambda+1) - (1-\lambda)\cdot\lambda] = \lambda^2 - \lambda + \lambda - \lambda^2 = 0$$

Hemos descubierto que da igual el valor que tome el parámetro λ que siempre el determinante de la matriz de coeficientes será cero, indicándonos que existe en ella al menos una combinación lineal y por lo tanto $r(A) < 3$. En este caso para obtener los valores del parámetro λ nos apoyaremos en la matriz ampliada A', seleccionado un menor de orden 3 cualquiera distinto de la matriz A y le obligaremos que su determinante sea cero.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \lambda & \lambda \\ \cancel{0} & -\lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot[\lambda\cdot 1 - (-\lambda+1)\cdot\lambda] = \lambda^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right| \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

A continuación solamente deberemos estudiar el rango de A y A' mediante determinantes, para los casos: $\lambda = 0$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

i) Para $\lambda = 0$.

Sustituimos el valor $\lambda = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación estudiamos el rango de ambas matrices por determinantes.

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A':

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si tiene una fila o columna llena de} \\ \text{ceros el determinante vale cero} \end{array} \right] = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si nuestro sistema toma valores distintos de $\lambda = 0$ sabemos que existe un menor de orden 3 contenido en A' cuyo determinantes es distinto de cero y como el rango de la matriz A nunca puede ser 3, lo descubrimos al principio del ejercicio el $r(A) = 2 \neq r(A') = 3$.

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $\lambda = 0 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.

b) Para $\lambda = 0$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), en consecuencia debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_2) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} y - z = -1 \\ \cancel{0 = 0} \\ x + y = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} y - z = -1 \\ x + y = 0 \end{array}\right.$$

Ya tenemos el sistema escalonado, a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $y = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y & = & 0 \\ y & = & \theta \\ y - z & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x + (\theta) & = & 0 \\ y & = & \theta \\ (\theta) - z & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 1 + \theta \end{array}\right., \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x, y, z) = (-\theta; \theta; 1 + \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

La solución del sistema para $\lambda = 0$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 1 + \theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (-\theta; \theta; 1 + \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2015. TITULAR SEPTEIMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + (\alpha - 1)\, z &= \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2\alpha - 2 \end{cases}$$

a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.
b) [1,5 puntos] Determina, si existe, el valor de α para el que $(x,\ y,\ z) = (1,\ -3,\ \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

---

a) Sustituimos $\alpha = 1$ para obtener el sistema que debemos de resolver.

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases} \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el rango de ambas matrices para ver a que tipo de sistema nos enfrentamos. Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, y en la matriz ampliada siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-2C_2} \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 3 & \cancel{-1} & -3 \\ -1 & \cancel{1} & 2 \end{vmatrix} = -(1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot [3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3)] =$$

$$= -6 + 3 = -3 \neq 0 \rightarrow r(A) = 3$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 3 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Al estar la matriz de coeficientes incluida dentro de la matriz ampliada, nos garantiza que los mismos menores usados para determinar el rango de A los tenemos en A', en consecuencia el $r(A') = 3$.

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema en función de sus rangos.

- El $r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

Para resolverlo podemos optar principalmente por dos métodos:

i) Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan: Escalonaremos el sistema para obtener la solución.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=2F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{3}F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3=-\frac{1}{3}F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2+5F_3]{F_1=F_1-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)\xrightarrow{F_3=-\frac{2}{3}F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3=-\frac{2}{3}F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1-F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

La solución del sistema es $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{2}{3} \\ y & = & -\frac{4}{3} \\ z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$, pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

ii) Por la regla de Cramer: Mediante una división de determinantes.

Si reescribimos nuestro sistema en forma matricial $AX = B$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x - y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de x, y y z se definen como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Solución:

La solución del sistema es $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{2}{3} \\ y & = & -\frac{4}{3} \\ z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

b) Nos preguntan si es posible encontrar una única solución para el que $(x,\ y,\ z) = (1,\ -3,\ \alpha)$, nuestro sistema deberá cumplir dos condiciones que tenga solución única, para ellos debe ser un Sistema Compatible Determinado, y que obtengamos la solución pedida. Para resolverlo primero buscaremos aquellos valores de α que nos garanticen los valores pedidos sustituyéndolos en nuestro sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+(\alpha-1)\,z & = & \alpha-1 \\ x-\alpha y-3z & = & 1 \\ x+y+2z & = & 2\alpha-2 \\ x & = & 1 \\ y & = & -3 \\ z & = & \alpha \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} 2\,(1)+(-3)+(\alpha-1)\,(\alpha) & = & \alpha-1 \\ (1)-\alpha\,(-3)-3\,(\alpha) & = & 1 \\ (1)+(-3)+2\,(\alpha) & = & 2\alpha-2 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcr} -1+\alpha^2-\alpha & = & \alpha-1 \\ 1 & = & 1 \\ -2+2\alpha & = & 2\alpha-2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} \alpha^2-2\alpha & = & 0 \\ 1 & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora solamente debemos resolver cada una de las ecuaciones para obtener los valores del parámetro que necesitamos, en este caso solo tenemos una ecuación a resolver porque el resto son igualdades que siempre se cumplen para cualquier valor que tome nuestro parámetro.

$$\alpha^2-2\alpha=0; \quad \alpha\cdot(\alpha-2)=0\left\{\begin{array}{r} \alpha_1=0 \\ \alpha-2=0\to\alpha_2=2 \end{array}\right.$$

Ahora que disponemos de los valores de α que nos garantizan la solución pedida, debemos averiguar cual de ellos hace que nuestro sistema sea Compatible Determinado, así que estudiaremos el tipo de sistema en función de dichos valores.

i) Para $\alpha_1 = 0$.
Sustituimos el valor $\alpha = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

A continuación estudiamos el rango de ambas matrices por determinantes.

- Rango de A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1\leq r\,(A)\leq 3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0-1\cdot 1=-1\neq 0\to r\,(A)\geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Tiene dos filas o columnas} \\ \text{proporcionales su determinante} \\ \text{vale cero, } F_3=-F_2 \end{bmatrix} = 0\to r\,(A)=2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Tiene dos filas o columnas proporcionales} \\ \text{su determinante vale cero, } F_3 = -F_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$
$r(A') = 2$

ii) Para $\alpha_2 = 2$.

Sustituimos el valor $\alpha = 2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A continuación estudiamos el rango de ambas matrices por determinantes.

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -5 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_3]{F_1 = F_1 - 2F_3} \begin{vmatrix} \cancel{0} & -1 & -3 \\ \cancel{0} & -3 & -5 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= -1 \cdot [(-1) \cdot (-5) - (-3) \cdot (-3)] = 4 \neq 0 \rightarrow r(A) = 3$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 3 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

  Al estar la matriz de coeficientes incluida dentro de la matriz ampliada, nos garantiza que los mismos menores usados para determinar el rango de A los tenemos en A', por lo tanto el $\mathrm{r}(A') = 3$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema en función de sus rangos.

- Para $\alpha = 0$, el $r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $\alpha = 2$, el $r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

Solución:

Para $\alpha = 2$ existirá una única solución para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$.

2015. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x+\lambda y+\lambda z & = & 0 \\ \lambda x+2y+2z & = & 0 \\ \lambda x+2y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.
b) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un sistema de la forma $AX=0$, lo reconocemos porque todos sus términos independientes son nulos, se caracterizan por ser siempre Sistemas Compatibles, al verificarse siempre que $r(A)=r(A')$, encontrándonos con dos posibilidades:

- Si es Sistema Compatible Determinado, solo existe la solución trivial $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$.
- Si es Sistema Compatible Indeterminado, puede tener al menos una solución no trivial.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x+\lambda y+\lambda z & = & 0 \\ \lambda x+2y+2z & = & 0 \\ \lambda x+2y+z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2 & 2 & 0 \\ \lambda & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2 & 2 & 0 \\ \lambda & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema homogéneo que siempre es compatible, al tener siempre la denominada solución trivial $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$.

Al aparecer el parámetro λ en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de λ que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} \cancel{\lambda} & \cancel{\lambda} & \cancel{\lambda} \\ \cancel{0} & 2-\lambda & 2-\lambda \\ \cancel{0} & 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\cdot(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=\lambda\cdot(2-\lambda)\cdot[1\cdot(1-\lambda)-1\cdot(2-\lambda)]=\lambda\cdot(2-\lambda)\cdot(-1)=\lambda\cdot(\lambda-2)$$

$$\begin{array}{rr} |A| = & \lambda \cdot (\lambda - 2) \\ |A'| = & 0 \end{array} \Bigg| \; \lambda \cdot (\lambda - 2) = 0 \; \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 2\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r\,(A) \leq min\,\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0 \rightarrow r\,(A) \geq 2;\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ el $r\,(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r\,(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', además contiene una columna llena de ceros, por lo tanto el determinante de todos los menores de orden 3 que formemos distintos a la matriz A contendrá dicha columna y por las propiedades de los determinantes sabemos que si un determinante contienen una fila o columna llena de ceros vale cero, llegando a la conclusión que en sistemas homogéneos se cumple que $r\,(A) = r\,(A')$ (por dicha razón siempre son Sistemas Compatibles).

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2 \rightarrow r\,(A) = r\,(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 2\} \rightarrow r\,(A) = r\,(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, cuya única solución es la denominada solución trivial.

b) Nos piden que $z \neq 0$, es decir nos están obligando a que el sistema posea una solución distinta a la trivial que solo será posible si el sistema es Compatible Indeterminado, por el apartado anterior sabemos que para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ se verifica dicha condición. Para determinar si es posible resolveremos el sistema para ambos valores de λ.

i) Para $\lambda = 0$ tenemos un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{0=0} \\ 2y+2z=0 \\ 2y+z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2y+2z=0 \\ 2y+z=0 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y+2z &=& 0 \\ 2y+z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2y+2z &=& 0 \\ -z &=& 0 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema observamos que ha desaparecido la incógnita x, en consecuencia a dicha incógnita le impondremos un parámetro, $x = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \theta \\ 2y+2z &=& 0 \\ -z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \theta \\ 2y+2\cdot(0) &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \theta \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \text{, con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (\theta;\ 0;\ 0)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

ii) Para $\lambda = 2$ volvemos a tener un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{2x+2y+2z=0} \\ 2x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+2z &=& 0 \\ 2x+2y+z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+2z &=& 0 \\ -z &=& 0 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema observamos que $z = 0$ (podríamos parar de resolver aquí al no cumplir la condición del enunciado de que $z \neq 0$, pero seguimos resolviendo por obtener la solución del sistema), a una de las otras dos incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo $y = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y + 2z & = & 0 \\ y & = & \theta \\ -z & = & 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2\cdot(\theta) + 2\cdot 0 & = & \theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} 2x & = & -2\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array} \right. \text{, con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (-\theta;\ \theta;\ 0)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

Para que $z \neq 0$ nuestro sistema debe tener al menos una solución distinta de la solución trivial por tanto debe ser un Sistema Compatible Indeterminado, el cuál solo es posible para $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$ en cuyo caso z siempre vale cero y en consecuencia no existe ningún valor de λ que cumpla la condición indicada en el enunciado.

2015. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} x+\alpha z & = & 2 \\ 2x+\alpha y & = & \alpha+4 \\ 3x+y+(\alpha+4)z & = & 7 \end{array}\right\}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de α.
b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $\alpha=2$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left.\begin{array}{rcr} x+\alpha z & = & 2 \\ 2x+\alpha y & = & \alpha+4 \\ 3x+y+(\alpha+4)z & = & 7 \end{array}\right\} \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 0 & \alpha+4 \\ 3 & 1 & \alpha+4 & 7 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 0 & \alpha+4 \\ 3 & 1 & \alpha+4 & 7 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro α en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de α que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3-\alpha C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \alpha & -2\alpha \\ \cancel{3} & 1 & 4-2\alpha \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} \alpha & -2\alpha \\ 1 & 4-2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\cdot(4-2\alpha) - 1\cdot(-2\alpha) = 4\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha = -2\alpha^2+6\alpha$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A| = & -2\alpha^2+6\alpha \\ |A'| = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -2\alpha^2+6\alpha=0 \rightarrow \alpha\cdot(-2\alpha+6)=0 \\ \alpha_1=0 \\ -2\alpha+6=0;\quad -2\alpha=-6 \rightarrow \alpha_2=3 \end{array}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=3$ y $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall m \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 3$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 3$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro α toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de α aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $\alpha_1 = 0$.

Sustituimos el valor $\alpha_1 = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & \cancel{0} & 4 \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{7} \end{vmatrix} = -(1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c}\text{El determinante de una matriz} \\ \text{que contiene una fila o columna} \\ \text{proporcional vale cero, en nuestro} \\ \text{caso } C_2 = 2\cdot C_1\end{array}\right] = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

ii) Para $\alpha_2 = 3$.

Sustituimos el valor $\alpha_2 = 3$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 2C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & 3 & 3 \\ \cancel{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales o} \\ \text{proporcionales su determinante vale cero, } F_1 = 3\cdot F_2\end{array}\right] = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 3$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 3 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $\alpha = 2$, por el apartado anterior sabemos que se trata de un Sistema Compatible Determinado con una única solución para cada incógnita, sustituimos el valor del parámetro dado para obtener el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{aligned} x + 2z &= 2 \\ 2x + 2y &= 6 \\ 3x + y + 6z &= 7 \end{aligned}\right.$$

Para resolverlo podemos optar principalmente por dos métodos:

i) Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan: Escalonaremos el sistema para obtener la solución.

$$\left\{\begin{aligned} x + 2z &= 2 \\ 2x + 2y &= 6 \\ 3x + y + 6z &= 7 \end{aligned}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{4}F_3}$$

$$\xrightarrow{F_3=-\frac{1}{4}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \text{, pudiendo expresarse también como } (x,\ y,\ z) = (2;\ 1;\ 0)$$

ii) Por la regla de Cramer: Mediante una división de determinantes.

Si reescribimos nuestro sistema en forma matricial $AX = B$

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 2x + 2y = 6 \\ 3x + y + 6z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Los valores de x, y y z se definen como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

Solución:

La solución del sistema para $\alpha = 2$ es $\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (2;\ 1;\ 0)$.

2015. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcr} \alpha x+y+3z & = & 4 \\ x+y-2z & = & -2 \\ -x+2y+(3+\alpha)\,z & = & 4+\alpha \end{array}\right.$$

a) [1,25 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.
b) [1,25 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcr} \alpha x+y+3z & = & 4 \\ x+y-2z & = & -2 \\ -x+2y+(3+\alpha)\,z & = & 4+\alpha \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha & 4+\alpha \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha & 4+\alpha \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro α en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de α que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} \cancel{\alpha} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 1-\alpha & \cancel{0} & -5 \\ -1-2\alpha & \cancel{0} & \alpha-3 \end{vmatrix} = -(1)\cdot\begin{vmatrix} 1-\alpha & -5 \\ -1-2\alpha & \alpha-3 \end{vmatrix} =$$

$$=-1\cdot[(1-\alpha)\cdot(\alpha-3)-(-1-2\alpha)\cdot(-5)]=\alpha^2+6\alpha+8$$

$$\alpha^2+6\alpha+8=0$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & \alpha^2+6\alpha+8 \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \quad \alpha=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=\dfrac{-6-2}{2}=-4 \\ \alpha_2=\dfrac{-6+2}{2}=-2 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = -2$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas, columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -5 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall m \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $\alpha = -4$ y $\alpha = -2$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, en consecuencia los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para los casos $\alpha = -4$ y $\alpha = -2$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro α toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de α aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $\alpha_1 = -4$.

Sustituimos el valor $\alpha = -4$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente

- Rango de A':

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A\subset A' \\ r\left(A\right)\leq r\left(A'\right)\leq 3 \\ 2\leq r\left(A'\right)\leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r\left(A'\right)=2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right)=3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1+2F_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \\ 2 & -1 & \cancel{0} \end{vmatrix} = -\left(1\right)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=3\cdot\left(-1\right)-2\cdot\left(-1\right)=-1\neq 0\rightarrow r\left(A'\right)=3$$

ii) Para $\alpha_2=-2$.

Sustituimos el valor $\alpha=-2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r\left(A\right)=2$, explicado anteriormente.
- Rango de A':

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A\subset A' \\ r\left(A\right)\leq r\left(A'\right)\leq 3 \\ 2\leq r\left(A'\right)\leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r\left(A'\right)=2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right)=3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & -5 & -6 \\ \cancel{0} & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \text{Tiene dos filas o columnas} \\ \text{proporcionales su determinante} \\ \text{vale cero, } F_2=F_3 \end{bmatrix}=0\rightarrow r\left(A'\right)=2$$

iii) Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, \ -2\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $\alpha = -4$ y $\alpha = -2$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r\left(A\right) = r\left(A'\right) = 3$$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema en función de sus rangos.

- Para $\alpha = -4$, el $r\left(A\right) = 2 \neq r\left(A'\right) = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $\alpha = -2$, el $r\left(A\right) = r\left(A'\right) <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, \ -2\} \rightarrow r\left(A\right) = r\left(A'\right) =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

Solución:

Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, \ -2\}$ nuestro sistema tendrá solución única al se un Sistema Compatible Determinado.

b) Para que nuestro sistema tenga al menos dos soluciones debe de ser un Sistema Compatible Indeterminado, que gracias al apartado anterior sabemos que solo ocurre cuando $\alpha = -2$, para dicho valor nuestro sistema posee un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), para resolverlo debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} -2x+y+3z=4 \\ x+y-2z=-2 \\ \cancel{-x+2y+z=2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} -2x+y+3z=4 \\ x+y-2z=-2 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{r} x+y-2z=-2 \\ -2x+y+3z=4 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+y-2z & = & -2 \\ 3y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $y = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y-2z & = & -2 \\ y & = & \theta \\ 3y-z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+(\theta)-2z & = & -2 \\ y & = & \theta \\ 3\cdot(\theta)-z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-2\cdot(3\theta) & = & -2-\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right. \rightarrow$$

$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2+5\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$,pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (-2+5\theta;\ \theta;\ 3\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

El sistema tendrá al menos dos soluciones siempre que sea un Sistema Compatible Indeterminado que solo es posible para $\alpha = -2$, siendo la solución del mismo $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2+5\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (-2+5\theta;\ \theta;\ 3\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2015. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el sistema dado por $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
b) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
c) [1 punto] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

Para poder contestar a todas las cuestiones en primer lugar realizaremos la discusión del sistema según el parámetro α. Realizando la operación indicada en el enunciado, $A \cdot X = B$, obtendremos el sistema de ecuaciones que debemos discutir.

$$A_{3x3} \cdot X_{3x1} = B_{3x1} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha x + 2y - z & = & 1 \\ y + 2z & = & \alpha - 2 \\ 3x + 4y + \alpha z & = & 3 \end{array} \right.$$

Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \alpha x + 2y - z & = & 1 \\ y + 2z & = & \alpha - 2 \\ 3x + 4y + \alpha z & = & 3 \end{array} \right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & \alpha & 3 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro α en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de α que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 2C_2} \begin{vmatrix} \alpha & \cancel{2} & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 3 & \cancel{4} & \alpha - 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & -5 \\ 3 & \alpha - 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot [\alpha \cdot (\alpha - 8) - 3 \cdot (-5)] = \alpha^2 - 8\alpha + 15$$

$$\left. \begin{array}{rc} |A| = & \alpha^2 - 8\alpha + 15 \\ |A'| = & 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} \alpha^2 - 8\alpha + 9 = 0 \\ \alpha = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{8-2}{2} = 3 \\ \alpha_2 = \dfrac{8+2}{2} = 5 \end{array} \right. \end{array}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas, \ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = -3 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2; \ \forall m \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 5$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para los casos $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 5$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro α toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Por todo lo anteriormente expuesto solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de α aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $\alpha_1 = 3$.

Sustituimos el valor $\alpha = 3$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A continuación estudiamos el rango de ambas matrices por determinantes.

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & 1 \\ \cancel{0} & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Tiene dos filas o columnas} \\ \text{proporcionales su determinante} \\ \text{vale cero, } F_3 = 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \rightarrow r(A') = 2$$

i) Para $\alpha_2 = 5$.

Sustituimos el valor $\alpha = 5$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

A continuación estudiamos el rango de ambas matrices por determinantes.

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente
- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_2} \begin{vmatrix} 5 & \cancel{2} & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 3 & \cancel{4} & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot [5 \cdot (-9) - 3 \cdot (-5)] =$$

$$= -30 \neq 0 \rightarrow r(A') = 3$$

iii) Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 5$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia $r(A) = r(A') = 3$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema en función de sus rangos.

- Para $\alpha = 3$, el $r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $\alpha = 5$, el $r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

a)

Solución:

Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$ el sistema tendrá solución única al tratarse de un Sistema Compatible Determinado.

b)

Solución:

Para $\alpha = 5$ el sistema no tendrá solución al tratarse de un Sistema Incompatible.

c) Para que nuestro sistema tenga al menos dos soluciones debe de ser un Sistema Compatible Indeterminado, que gracias al apartado anterior sabemos que solo ocurre cuando $\alpha = 3$, para dicho valor nuestro sistema posee un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), para resolverlo debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{3x+2y-z=1} \\ y+2z=1 \\ 3x+4y+3z=3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} y+2z=1 \\ 3x+4y+3z=3 \end{array}\right.$$

Nuestro sistema ya se encuentra escalonado, así que a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z=\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y+3z & = & 3 \\ y+2z & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y+3\cdot(\theta) & = & 3 \\ y+2\cdot(\theta) & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+4\cdot(1-2\theta) & = & 3-3\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right., \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\, y,\, z) = \left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\theta;\ 1-2\theta;\ \theta\right)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

El sistema tendrá al menos dos soluciones siempre que sea un Sistema Compatible Indeterminado que solo es posible para $\alpha = 3$, siendo la solución del mismo $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\, y,\, z) = \left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\theta;\ 1-2\theta;\ \theta\right)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.