Bloque 1: Matrices y Determinantes

Propiedades de los Determinantes 2014

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) [0,5 puntos] $det\,(3A)$

b) [0,5 puntos] $det\left(A^{-1}\right)$

c) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

d) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Resolvemos todos los apartados aplicando las propiedades de los determinantes.

a)

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3\cdot x & 3\cdot y & 3\cdot z \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.}\end{array}\right] =$$

$$= 3\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3^3\cdot|A| = 3^3\cdot 2 = 54$$

Solución:

El $|3\cdot A| = 54$.

b)

$$\left|A^{-1}\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual} \\ \text{a la inversa de su determinante:} \\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|\,; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I| \\ \text{como } |I|\text{=}1 \to \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}\end{array}\right] = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

Solución:

El $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{2}$.

c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determiante queda} \\ \text{multiplicado por } (-1)\text{, tantas veces como permutaciones se hayan} \\ \text{realizado, si nosotros intercambiamo la } F_1 \text{ y la } F_2 \text{ obtendremos} \\ \text{una matriz muy parecida a la dada en el enunciado.} \end{array} \right] =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3x & 2y & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si reescribimos la columna } C_2 \text{ como un} \\ \text{producto obtendremos la misma columna} \\ \text{que en la matriz dada.} \end{array} \right] =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3x & 2 \cdot y & z \\ 3 & 2 \cdot 0 & 1 \\ 3 & 2 \cdot 2 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se} \\ \text{encuentra multiplicada por un mismo número,} \\ \text{dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.} \end{array} \right] =$$

$$= (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot |A| = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = -12$$

Solución:

El $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -12.$

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante es suma de} \\ \text{dos términos, el determinante es igual a la suma de dos} \\ \text{determinantes que tienen en dicha fila o columna el} \\ \text{primero y el segundo sumando respectivamente, siendo} \\ \text{el resto de elementos iguales a los del determinante inicial.} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columa de un determinante se encuentra} \\ \text{multiplicada por un mismo número, dicho número} \\ \text{podemos extraerlo fuera multiplicando al determinante} \end{array} \right] =$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ x & y & z\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} + (-1)\cdot(2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales}\\ \text{su determinante vale cero.}\end{array}\right] =$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ x & y & z\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} + 0 =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determiante queda}\\ \text{multiplicado por } (-1)\text{, tantas veces como permutaciones se hayan}\\ \text{realizado, si nosotros intercambiamo la } F_1 \text{ y la } F_2 \text{ obtendremos}\\ \text{una matriz muy parecida a la dada en el enunciado.}\end{array}\right] =$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determiante queda}\\ \text{multiplicado por } (-1)\text{, tantas veces como permutaciones se hayan}\\ \text{realizado, si nosotros intercambiamo la } F_2 \text{ y la } F_3 \text{ obtendremos}\\ \text{una matriz muy parecida a la dada en el enunciado.}\end{array}\right] =$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = (-1)\cdot|A| = (-1)\cdot 2 = -2$$

Solución:

El $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ x+2 & y+4 & z+6\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix} = -2.$

2014. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO3.

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, halla los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) [1 punto] $det\left(A^3\right)$, $det\left(A^{-1}\right)$ y $det\left(A + A^t\right)$ $\left(A^t \text{ indica la traspuesta de } A\right)$.

b) [0,75 puntos] $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$.

c) [0,75 puntos] $det\begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix}$.

Resolveremos todos los apartados aplicando las propiedades de los determinantes.

a)

$$\left|A^3\right| = |A \cdot A \cdot A| = \left[\begin{array}{l} \text{El determinante del producto de dos matrices cuadradas} \\ \text{del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.} \end{array}\right] =$$

$$= |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^3 = (3)^3 = 27$$

$$\left|A^{-1}\right| = \left[\begin{array}{l} \text{El determinante de una matriz inversa es igual} \\ \text{a la inversa de su determinante:} \\ A \cdot A^{-1} = I; \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I|; |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |I| \\ \text{como } |I|\text{=1} \rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right] = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

$$\left|A + A^t\right| = \left[\begin{array}{l} \text{Denotamos } B \text{ a la matriz} \\ \text{obtenida de la suma } A \text{ y } A^t \\ B = A + A^t = \\ = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix} = 2A \end{array}\right] =$$

Este apartado se puede resolver rápidamente si nos damos cuenta que la matriz A es una matriz simétrica, porque coincide con su traspuesta $A = A^t$, por lo tanto siempre que sumemos una matriz simétrica con su traspuesta obtendremos la misma matriz dada pero multiplicada por 2, es decir $A + A^t = 2A$.

$$= |B| = |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.} \end{array} \right] =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 2^3 \cdot |A| = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Solución:

El $|A^3| = 27$, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{3}$ y $|A + A^t| = 24$.

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.} \end{array} \right] =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determinante queda} \\ \text{multiplicado por } (-1) \text{, tantas veces como permutaciones se hayan} \\ \text{realizado, si nosotros intercambiamo la } F_2 \text{ y la } F_3 \text{ obtendremos} \\ \text{la matriz dada en el enunciado.} \end{array} \right] =$$

$$= (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot |A| = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Solución:

El $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = -6.$

c)

$$\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante es suma de} \\ \text{dos términos, el determinante es igual a la suma de dos} \\ \text{determinantes que tienen en dicha fila o columna el} \\ \text{primero y el segundo sumando respectivamente, siendo} \\ \text{el resto de elementos iguales a los del determinante inicial.} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se} \\ \text{encuentra multiplicada por un mismo número,} \\ \text{dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.} \end{array} \right] =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & d & b \\ c & e & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si un determinante tiene dos filas o columnas} \\ \text{iguales su determinante vale cero.} \end{array} \right] =$$

$$= 4 \cdot 0 - |A| = -3$$

Solución:

El $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = -3.$

2014. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 puntos] $det\left(-2A\right)$ y $det\left(A^{-1}\right)$.

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

Resolveremos ambos apartados aplicando las propiedades de los determinantes.

a)

$$|-2A| = \begin{vmatrix} -2\cdot a_{11} & -2\cdot a_{12} & -2\cdot a_{12} \\ -2\cdot a_{21} & -2\cdot a_{22} & -2\cdot a_{23} \\ -2\cdot a_{31} & -2\cdot a_{32} & -2\cdot a_{33} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra} \\ \text{multiplicada por un mismo número, dicho número} \\ \text{podemos extraerlo fuera multiplicando al determinante.} \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ -2\cdot a_{21} & -2\cdot a_{22} & -2\cdot a_{23} \\ -2\cdot a_{31} & -2\cdot a_{32} & -2\cdot a_{33} \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-2)^3\cdot|A| =$$

$$= (-2)^3\cdot(-3) = 24$$

$$\left|A^{-1}\right| = \begin{bmatrix} \text{El determinante de una matriz inversa es igual} \\ \text{a la inversa de su determinante:} \\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I| \\ \text{como } |I|\text{=1} \rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Solución:

El $|-2A| = 24$ y $\left|A^{-1}\right| = -\dfrac{1}{3}$.

b)

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.} \end{array} \right] =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determinante queda} \\ \text{multiplicado por } (-1)\text{, tantas veces como permutaciones se hayan} \\ \text{realizado, si nosotros intercambiamo la } F_1 \text{ y la } F_2 \text{ obtendremos} \\ \text{la matriz dada en el enunciado.} \end{array} \right] =$$

$$= (-1) \cdot 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 \cdot 2 \cdot |A| = (-1) \cdot 7 \cdot 2 \cdot (-3) = 42$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante es suma de} \\ \text{dos términos, el determinante es igual a la suma de dos} \\ \text{determinantes que tienen en dicha fila o columna el} \\ \text{primero y el segundo sumando respectivamente, siendo} \\ \text{el resto de elementos iguales a los del determinante inicial.} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se} \\ \text{encuentra multiplicada por un mismo número,} \\ \text{dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante.} \end{array} \right] =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales} \\ \text{su determinante vale cero.} \end{array} \right] =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \cancel{2 \cdot 5 \cdot 0} = \left[\begin{array}{l} \text{El determinante obtenido} \\ \text{es la traspuesta de } A. \end{array} \right] =$$

$$= 5 \cdot |A^t| = \left[\begin{array}{l} \text{El determinante de una matriz cuadrada} \\ \text{coincide con el determinantes de su traspuesta.} \end{array} \right] =$$

$$= 5 \cdot |A| = 5 \cdot (-3) = -15$$

Solución:

El $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 42$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -15.$