Bloque 1: Matrices y Determinantes

Matriz

Inversa 2014

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 puntos] Calcula A^{-1}.
b) [2 punto] Halla la matriz X que verifica que $A^tX + B = I$, siendo I la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3-2C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & 1 & -1 \\ \cancel{2} & 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1)] = -1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$ la matriz tiene inversa, obtenemos A^{-1} mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^t \cdot X + B = I$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A^t \cdot X + B = I \rightarrow A^t \cdot X = I - B$$

Como A^t se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por $\left(A^t\right)^{-1}$.

$$A^t \cdot X = I - B \rightarrow \left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t \cdot X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B)$$

$$\text{Como } \left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t = I \rightarrow I \cdot X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B)$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $\left(A^t\right)^{-1}$, $I - B$ y posteriormente $\left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B)$.

Por las propiedades de la matriz inversa sabemos que $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$,por lo tanto obtener $\left(A^t\right)^{-1}$ es sencillamente hacer la traspuesta a A^{-1} ya calculada en el apartado anterior.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $I - B$

$$I_{3x3} - B_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-0 & 0-(-3) \\ 0-3 & 1-(-1) & 0-(-3) \\ 0-(-1) & 0-(-2) & 1-(-1) \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $\left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B)$ para obtener la matriz X.

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) + (-2)\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 0 + (-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 & 3\cdot 3 + (-2)\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ -6\cdot(-1) + 4\cdot(-3) + 3\cdot 1 & -6\cdot 0 + 4\cdot 2 + 3\cdot 2 & -6\cdot 3 + 4\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$

2014. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2A + I$? (I denota la matriz identidad).
b) [1,75 puntos] Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

---

a) Para obtener los valores de m que verifican la igualdad dada en el enunciado en primer lugar realizaremos las siguientes operaciones A^2, $2A$ y $2A + I$.

$$A^2 = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+m)\cdot(1+m)+1\cdot 1 & (1+m)\cdot 1+1\cdot(1-m) \\ 1\cdot(1+m)+(1-m)\cdot 1 & 1\cdot 1+(1-m)\cdot(1-m) \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$2 \cdot A_{2x2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2\cdot(1+m) & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(1-m) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$2A_{2x2} + I_{2x2} = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2+2m+1 & 2+0 \\ 2+0 & 2-2m+1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}_{2x2}$$

Como $A^2 = 2A + I$, entonces ambas matrices deben de ser iguales lo que significa que cada uno de sus coeficientes deben de coincidir, para ello igualaremos coeficiente a coeficiente para obtener un sistema de ecuaciones que al resolverlo obtendremos, si existen, los valores de m.

$$\begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$\begin{matrix} m^2+2m+2 = 3+2m & 2=2 \\ 2=2 & m^2-2m+2 = 3-2m \end{matrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido.

$$m^2+2m+2 = 3+2m; \quad m^2+\cancel{2m}+2-3-\cancel{2m} = 0; \quad m^2-1=0; \quad m^2=1; \quad m=\pm\sqrt{1} \to m=\pm 1$$

$2 = 2$ se trata de una igualdad que es cierta, si no fuera cierta no sería posible que ambas matrices sean iguales.

$$m^2-2m+2 = 3-2m; \quad m^2-\cancel{2m}+2-3+\cancel{2m} = 0; \quad m^2-1=0; \quad m^2=1; \quad m=\pm\sqrt{1} \to m=\pm 1$$

Para que se cumplan todas las igualdades deben de coincidir las soluciones obtenidas en cada una de las ecuaciones, en este caso nos coinciden ambas soluciones.

Solución:

Para $m = \pm 1$ se verifica la igualdad $A^2 = 2A + I$.

b) Sustituimos el valor de $m = 1$ para obtener la matriz A que usaremos en el ejercicio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada A es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir si $A = A^t$. La inversa de una matriz simétrica es simétrica por lo tanto la expresión para calcular su inversa la podemos escribir como:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} cof\,(A)$$

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$ la matriz tiene inversa, obtenemos A^{-1} mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} cof\,(A) \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 0 & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X - B = A \cdot B$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A \cdot X - B = A \cdot B \rightarrow A \cdot X = A \cdot B + B$$

Como A se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A\cdot X = A\cdot B + B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot (A\cdot B + B)$$

Simplificaremos la ecuación si realizamos la multiplicación

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot A\cdot B + A^{-1}\cdot B$$

$$\text{Como } A^{-1}\cdot A = I \rightarrow I\cdot X = I\cdot B + A^{-1}\cdot B$$

$$\text{y} \quad \begin{array}{l} I\cdot X = X \\ I\cdot B = B \end{array} \rightarrow X = B + A^{-1}\cdot B$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = B + A^{-1}\cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, $A^{-1}\cdot B$ y posteriormente $B + A^{-1}\cdot B$.

La matriz inversa de A la hemos calculado al principio del apartado.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos $A^{-1}\cdot B$

$$A^{-1}_{2x2}\cdot B_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $B + A^{-1}\cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = B + A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+0 \\ 1+(-1) & 0+(-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$ y la matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$.