Bloque 2: Sistema de Ecuaiones Lineales

Discusión de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2014

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2014. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 4

2014. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 8

2014. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3. 12

2014. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 17

2014. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 22

2014. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y-3z &= 3 \\ 2x+3y+z &= 5 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+y-7z=1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.
b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

---

a) Añadimos la nueva ecuación a nuestro sistema y transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\begin{cases} x+2y-3z &= 3 \\ 2x+3y+z &= 5 \\ \alpha x+y-7z &= 1 \end{cases} \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 1 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

El enunciado nos impone que nuestro nuevo sistema debe tener las mismas soluciones que el original, como el sistema dado se puede ver a simple que sus dos ecuaciones no son proporcionales sabemos que son linealmente independientes lo que significa que la nueva ecuación debe ser combinación lineal de ellas dos, para determinar el valor de α que provoca la combinación lineal nos bastará con calcular el determinante de la matriz de coeficientes e imponerle que sea cero, porque sabemos por las propiedades de los determinantes que si existe combinación lineal en una matriz su determinante valdrá cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \emptyset & \emptyset \\ \cancel{2} & -1 & 7 \\ \cancel{\alpha} & 1-2\alpha & -7+3\alpha \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1-2\alpha & -7+3\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(-1)\cdot(-7+3\alpha) - (1-2\alpha)\cdot 7] = 11\alpha \rightarrow \begin{array}{rr} |A| = & 11\alpha \\ |A'| = & 0 \end{array} \Bigg| \; 11\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

Solución:

Para $\alpha = 0$ la nueva ecuación será combinación lineal de las ecuaciones dadas dando lugar a que ambos sistemas tengan las mismas soluciones.

b) Creamos la nueva ecuación $x+y+z=4$, que añadimos al sistema dado para obtener el nuevo sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 3 \\ 2x+3y+z & = & 5 \\ x+y+z & = & 4 \end{array}\right.$$

Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 3 \\ 2x+3y+z & = & 5 \\ x+y+z & = & 4 \end{array}\right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el rango de ambas matrices para ver a que tipo de sistema nos enfrentamos.
Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, y en la matriz ampliada siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-2F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & -1 & 7 \\ \cancel{0} & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow r(A) = 3.$$

- Rango de A':

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 3 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Por lo anteriormente expuesto al ser el determinante de la matriz de coeficientes distinto de cero el rango de ambas matrices será 3.

Mediante el teorema de Rouché-Frobenius podremos clasificar el sistema en función de los rangos:

- Como $(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

Para resolverlo podemos optar principalmente por dos métodos:

i) Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan: Escalonaremos el sistema para obtener la solución.

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-7F_3]{F_1=F_1+3F_3}$$

$$\xrightarrow[F_2=F_2-7F_3]{F_1=F_1+3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

La solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{25}{3} \\ y & = & -\frac{11}{3} \\ z & = & -\frac{2}{3} \end{array}\right. \text{,pudiendo expresarse también como } (x,\ y,\ z) = \left(\tfrac{25}{3};\ -\tfrac{11}{3};\ -\tfrac{2}{3}\right)$$

ii) Por la regla de Cramer: Mediante una división de determinantes.

Si reescribimos nuestro sistema en forma matricial $AX = B$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los valores de x, y y z se definen como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{25}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{3} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3}$$

Solución:

La solución del sistema es $\begin{cases} x = \frac{25}{3} \\ y = -\frac{11}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$ o también la podemos expresar como $(x,\, y,\, z) = \left(\frac{25}{3};\, -\frac{11}{3};\, -\frac{2}{3}\right)$.

2014. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+mz & = & 0 \\ mx+2y+z & = & 0 \\ -x+y+2mz & = & 0 \end{array}\right.$$

a) [0,75 puntos] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.
b) [1 punto] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.
c) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $m=-2$.

---

a) y b) Resueltos a la vez

Para poder contestar a las dos primeras cuestiones en primer lugar realizaremos la discusión del sistema según el parámetro m. Para ello transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un sistema de la forma $AX=0$, lo reconocemos porque todos sus términos independientes son nulos, se caracterizan por ser siempre Sistemas Compatibles, encontrándonos con dos posibilidades:

- Si es Sistema Compatible Determinado, solo existe la solución trivial $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$.
- Si es Sistema Compatible Indeterminado puede tener al menos una solución no trivial.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+mz & = & 0 \\ mx+2y+z & = & 0 \\ -x+y+2mz & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2m & 0 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema homogéneo que siempre es compatible, al tener siempre la denominada solución trivial $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$.

Al aparecer el parámetro m en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de m que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+2F_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cancel{m} \\ m+2 & 0 & \cancel{1+2m} \\ \emptyset & \emptyset & \cancel{3m} \end{vmatrix} = 3m \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m+2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3m \cdot [1 \cdot 0 - (m+2) \cdot (-1)] = 3m \cdot (m+2)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A| = & 3m \cdot (m+2) \\ |A'| = & 0 \end{array}\right| \quad 3m \cdot (m+2) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{r} m+2 = 0 \rightarrow m_1 = -2 \\ 3m = 0 \rightarrow m_2 = 0 \end{array} \right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $m_1 = -2$, $m_2 = 0$ y $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 0\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero para los casos en los que $m_1 = -2$ y $m_2 = 0$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1 \leq r(A) \leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', además contiene una columna llena de ceros, así que el determinante de todos los menores de orden 3 que formemos distintos a la matriz A contendrá dicha columna y por las propiedades de los determinantes sabemos que si un determinante contienen una fila o columna llena de ceros vale cero, llegando a la conclusión que $r(A) = r(A')$.

Solamente deberemos estudiar el rango de la matriz de coeficientes en cada uno de los siguientes casos:

i) Para $m_1 = -2$.

Sustituimos el valor $m = -2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 3 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A': Como en sistemas homogéneos $r(A) = r(A') = 2$

ii) Para $m_2 = 0$.

Sustituimos el valor $m = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación estudiamos el rango de ambas matrices por determinantes.

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 2 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A': Como en sistemas homogéneos $r(A) = r(A') = 2$

iii) Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 0\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $m_1 = -2$ y $m_2 = 0$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $m_1 = -2$ y $m_2 = 0 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.

- Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 0\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, cuya única solución es la denominada solución trivial.

a)

Solución:

Para que solo tenga una única solución nuestro sistema debe ser un Sistema Compatible Determinado que solo es posible para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 0\}$, cuya solución única es la denominada solución trivial $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 0)$.

b)

Solución:

Para que tenga alguna solución distinta a la solución nula o trivial nuestro sistema debe ser un Sistema Compatible Indeterminado que solo es posible para $m_1 = -2$ y $m_2 = 0$.

c) Para $m = -2$ volvemos a tener un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), en consecuencia debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} x-y-2z=0 \\ -2x+2y+z=0 \\ \cancel{-x+y-4z=0} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-y-2z=0 \\ -2x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{r} x-y-2z=0 \\ -2x+2y+z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-2z & = & 0 \\ -3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema observamos que $z = 0$, debido a ello a una de las otras dos incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo $y = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-2z & = & 0 \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-(\theta)-2\cdot 0 & = & 0 \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right. ,\text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (\theta;\ \theta;\ 0)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

La solución del sistema para $m = -2$ es $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (\theta;\ \theta;\ 0)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2014. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcr} mx-2y+z &=& 1 \\ x-2my+z &=& -2 \\ x-2y+mz &=& 1 \end{array}\right.$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0,75 puntos] Si es posible, resuelve el sistema para $m=-2$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{c} mx-2y+z=1 \\ x-2my+z=-2 \\ x-2y+mz=1 \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} m & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2m & 1 & -2 \\ 1 & -2 & m & 1 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} m & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2m & 1 & -2 \\ 1 & -2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro m en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de m que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix}=m\cdot(-2m)\cdot m+1\cdot(-2)\cdot 1+(-2)\cdot 1\cdot 1-[1\cdot(-2m)\cdot 1]-(-2\cdot 1\cdot m)-[1\cdot(-2)\cdot m]=$$

$$=-2m^3+6m-4$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & -2m^3+6m-4 \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \begin{array}{r} -2m^3+6m-4=0 \\ -2\cdot\left(m^3-3m+2\right)=0 \end{array}$$

Resolvemos por Ruffini y posteriormente aplicando la fórmula de 2º grado.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow m_1=-2, \text{ entonces } -2\cdot\left(m^3-3m+2\right)=-2\cdot(m+1)\cdot\left(m^2-2m+1\right)$$

$$m^2-2m+1=0 \rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(1)\cdot(1)}}{2\cdot 1}=1 \text{ (Doble)}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $m_1 = -2$, $m_1 = 1$ y $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas, columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero para los casos en los que $m_1 = -2$ y $m_2 = 1$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1 \leq r(A) \leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, por lo tanto para dichos casos solo buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, en consecuencia los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

i) Para $m_1 = -2$.

Sustituimos el valor $m = -2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = -6 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2+2F_1} \begin{vmatrix} \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{1} \\ -3 & 0 & \cancel{0} \\ 3 & 0 & \cancel{0} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r\left(A'\right) = 2$$

ii) Para $m_2 = 1$.
Sustituimos el valor $m = 1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \le r\left(A\right) \le 2$$

  Este caso es muy rápido porque la matriz tiene las filas iguales, al tener tres filas iguales dos de ellas son combinación lineal respecto de alguna de ellas, por ejemplo podríamos decir que $F_2 = F_1$ y $F_3 = F_1$, al solamente tener una fila linealmente independiente podemos afirmar que $r\left(A\right) = 1$.

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r\left(A\right) \le r\left(A'\right) \le 3 \\ 1 \le r\left(A'\right) \le 3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0 \rightarrow r\left(A'\right) \ge 2$$

  Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r\left(A'\right) = 2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right) = 3$.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales} \\ \text{o proprcionales su determinante vale cero, } F_1 = F_2. \end{bmatrix} = 0 \rightarrow r\left(A'\right) = 2$$

iii) Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $m_1 = -2$ y $m_2 = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia $r(A) = r(A') = 3$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $m = -2 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $m = 1 \rightarrow r(A) = 1 \neq r(A') = 2$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $m = -2$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), así que debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} -2x-2y+z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ \cancel{x-2y-2z=1} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} -2x-2y+z &=& 1 \\ x+4y+z &=& -2 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+4y+z &=& -2 \\ -2x-2y+z &=& 1 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+4y+z &=& -2 \\ 6y+3z &=& -3 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $y = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+4y+z &=& -2 \\ 6y+3z &=& -3 \\ y &=& \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+4\cdot(\theta)+z &=& -2 \\ 6\cdot(\theta)+3z &=& -3 \\ y &=& \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+(-1-2\theta) &=& -2-4\theta \\ z &=& -1-2\theta \\ y &=& \theta \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1-2\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & -1-2\theta \end{array} \right. \text{, con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (-1-2\theta;\ \theta;\ -1-2\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

La solución del sistema para $m = -2$ es $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1-2\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & -1-2\theta \end{array} \right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (-1-2\theta;\ \theta;\ -1-2\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2014. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcr} x+(m+1)\,y+2z & = & -1 \\ mx+y+z & = & m \\ (1-m)\,x+2y+z & = & -m-1 \end{array}\right\}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0,75 puntos] Resuélvelo para $m=2$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left.\begin{array}{rcr} x+(m+1)\,y+2z & = & -1 \\ mx+y+z & = & m \\ (1-m)\,x+2y+z & = & -m-1 \end{array}\right\} \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro m en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de m que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2=F_2-F_3]{F_1=F_1-2F_3} \begin{vmatrix} -1+2m & m-3 & \cancel{0} \\ 2m-1 & -1 & \cancel{0} \\ \cancel{1-m} & \cancel{2} & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1+2m & m-3 \\ 2m-1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1+2m)\cdot(-1)-(2m-1)\cdot(m-3)=-2m^2+5m-2$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & -2m^2+5m-2 \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -2m^2+5m-2=0 \\ m=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\left\{\begin{array}{l} m_1=\frac{1}{2} \\ m_2=2 \end{array}\right. \end{array}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=2$ y $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},\,2\right\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas, \ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2; \ \forall m \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = 2$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = 2$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro m toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de m aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $m_1 = \frac{1}{2}$.

Sustituimos el valor $m = \frac{1}{2}$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.

- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right)=3$.

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2=F_2-F_1]{F_1=F_1-2F_3} \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & \cancel{0} & 2 \\ -1 & \cancel{0} & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot 2-(-1)\cdot 2=-3\neq 0 \rightarrow r\left(A'\right)=3$$

ii) Para $m_2=2$.

Sustituimos el valor $m=2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r\left(A\right)=2$, explicado anteriormente.

- Rango de A': $r\left(A'\right)=2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r\left(A\right)\leq r\left(A'\right)\leq 3 \\ 2\leq r\left(A'\right)\leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r\left(A'\right)=2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right)=3$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2+2F_1} \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ 7 & 5 & \cancel{0} \\ -7 & -5 & \cancel{0} \end{vmatrix} = -1\cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales o} \\ \text{proporcionales su determinante vale cero, } F_2=-F_1 \end{matrix}\right] = 0 \rightarrow r\left(A'\right)=2$$

iii) Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 2\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = 2$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $m = \frac{1}{2} \to r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $m = 2 \to r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 2\} \to r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $m = 2$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), en consecuencia debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{x+3y+2z=-1} \\ 2x+y+z=2 \\ -x+2y+z=-3 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ -x+2y+z=-3 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{r} -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z & = & -3 \\ 5y+3z & = & -4 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z & = & -3 \\ 5y+3z & = & -4 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+(\theta) & = & -3 \\ 5y+3\cdot(\theta) & = & -4 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} -x+2y & = & -3-\theta \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x+2\cdot\left(\dfrac{-4-3\theta}{5}\right) & = & -3-\theta \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{7-\theta}{5} \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right. , \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{7-\theta}{5};\ \frac{-4-3\theta}{5};\ \theta\right)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Como el enunciado nos pregunta si es posible encontrar una solución para que $z = 2$, igualamos el nuevo valor al obtenido anteriormente.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 2 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \theta = 2$$

Para $\theta = 2$ se satisface la condición impuesto, siendo la solución del sistema $\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -2 \\ z = & 2 \end{array}\right.$

Pudiendo expresarse como $(x,\ y,\ z) = (1;\ -2;\ 2)$

Solución:

La solución del sistema para $m = 2$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{7-\theta}{5} \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{7-\theta}{5};\ \frac{-4-3\theta}{5};\ \theta\right)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Para $\theta = 2$ existirá una solución que satisface $z = 2$, siendo la solución del sistema para este caso $(x,\ y,\ z) = (1;\ -2;\ 2)$.

2014. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda y+(\lambda+1)z & = & \lambda \\ \lambda x+z & = & \lambda \\ x+\lambda z & = & \lambda \end{array}\right.$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro λ.
b) [0,5 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
c) [0,5 puntos] Para $\lambda = 0$, si es posible, da tres soluciones distintas.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda y+(\lambda+1)z=\lambda \\ \lambda x+z=\lambda \\ x+\lambda z=\lambda \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro λ en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de λ que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{\lambda} & \cancel{\lambda+1} \\ \lambda & \cancel{0} & 1 \\ 1 & \cancel{0} & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda\cdot\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot[\lambda\cdot\lambda-1\cdot 1]=\lambda\cdot\left(\lambda^2-1\right)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & \lambda\cdot\left(\lambda^2-1\right) \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \quad \lambda\cdot\left(\lambda^2-1\right)=0\left\{\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda^2-1=0\rightarrow\lambda=\pm 1 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$ y $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1\leq r(M)\leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero para los casos en los que $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$ y $\lambda_3=1$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1\leq r(A)\leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, por tanto para dichos casos solo buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

i) Para $\lambda_1 = -1$.

Sustituimos el valor $\lambda = -1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ -1 & \cancel{0} & -1 \\ 1 & \cancel{0} & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)] = 2 \neq 0 \rightarrow r(A') = 3$$

ii) Para $\lambda_2 = 0$.
Sustituimos el valor $\lambda = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \to r(A) = 2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Este caso es más rápido que el anterior porque la matriz ampliada contiene una columna llena de ceros, así que el determinante de todos los menores de orden 3 que formemos distintos a la matriz A contendrá dicha columna y por las propiedades de los determinantes sabemos que si un determinante contienen una fila o columna llena de ceros vale cero, por tanto

$$r(A') = 2$$

iii) Para $\lambda_3 = 1$.
Sustituimos el valor $\lambda = 1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \to r(A) = 2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Este caso es mucho más rápido que el anterior porque si observamos detenidamente nos damos cuenta de que tiene dos filas iguales, puesto que $F_2 = F_3$, en consecuencia tienen una fila linealmente dependiente, por tanto su rango no puede ser 3, así que $r(A') = 2$

iv) Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia $r(A) = r(A') = 3$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $\lambda = -1 \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.

- Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.

- Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $\lambda = 1$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), en consecuencia debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} y+2z=1 \\ x+z=1 \\ \cancel{x+z=1} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} y+2z=1 \\ x+z=1 \end{array}\right.$$

Ya tenemos escalonado el sistema, a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z=\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 1 \\ y+2z & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x \quad +(\theta) & = & 1 \\ y+2\cdot(\theta) & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right., \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (1-\theta;\ 1-2\theta;\ \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

La solución del sistema para $\lambda = 1$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (1-\theta;\ 1-2\theta;\ \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

c) Para $\lambda = 0$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{z=0} \\ z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right.$$

Ya tenemos escalonado el sistema, al no aparecer la incógnita y en nuestro nuevo sistema será a ella a la que le impondremos un parámetro, $y=\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \theta \\ z & = & 0 \end{array}\right., \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (0;\ \theta;\ 0)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Para obtener las tres soluciones distintas nos bastará con darle tres valores reales al parámetro θ, por ejemple nosotros le daremos $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$ y $\theta_3 = 3$.

Solución:

Para $\lambda = 0$ la solución del sistema es $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1-\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right.$, con $\in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (1-\theta; 1-2\theta; \theta)$, con $\in \mathbb{R}$, dándole los valores de $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$ y $\theta_3 = 3$ obtendremos tres soluciones distintas para nuestro sistema, siendo:

- Para $\theta_1 = 0 \rightarrow (x, y, z) = (0; 0; 0)$.
- Para $\theta_2 = 1 \rightarrow (x, y, z) = (0; 1; 0)$.
- Para $\theta_3 = 2 \rightarrow (x, y, z) = (0; 2; 0)$.