Bloque 1: Matrices y Determinantes

Propiedades de los Determinantes 2013

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1}.
b) [0,25 puntos] Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.
c) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$ y $|B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot [1 \cdot 1 - 1 \cdot 0] = 2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & -1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = 0 \rightarrow \nexists B^{-1}$$

Como $|B| = 0$ la matriz B no tiene inversa mientras que $|A| \neq 0$ la matriz posee inversa, obtenemos A^{-1} mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

Solo es posible realizar la inversa de la matriz A porque es la única que su determinante es distinto de cero, siendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

A^n es n veces el producto de A, es decir

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$$

$$\left|AB^{2013}A^t\right| = \left[\begin{array}{l} \text{El determinante del producto} \\ \text{de dos matrices cuadradas del} \\ \text{mismo orden es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes.} \end{array}\right] =$$

$$= |A| \cdot \overbrace{|B| \cdot |B| \cdots |B|}^{\text{2013 veces}} \cdot \left|A^t\right| = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot \left|A^t\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{El determinante de una matriz cuadrada} \\ \text{coincide con el determinante de su} \\ \text{traspuesta.} \end{array}\right] = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot |A| = 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Solución:

El $\left|AB^{2013}A^t\right| = 0$.

c) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X - B = A \cdot B$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$A \cdot X - B = A \cdot B \rightarrow A \cdot X = A \cdot B + B$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$A \cdot X = A \cdot B + B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot B + A^{-1} \cdot B$

Como $A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = I \cdot B + A^{-1} \cdot B$

y $\left. \begin{array}{r} I \cdot X = X \\ I \cdot B = B \end{array} \right| \rightarrow X = B + A^{-1} \cdot B$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = B + A^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, $A^{-1} \cdot B$ y posteriormente $B + A^{-1} \cdot B$.

La matriz inversa de A la calculamos en el apartado a).

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$.

$$A^{-1}_{3x3} \cdot B_{3x3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $B + A^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = B + A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + (-1) & 1 + 1 & 1 + \frac{3}{2} \\ 1 + 2 & -1 + (-2) & 1 + (\frac{-1}{2}) \\ 0 + 0 & 0 + 0 & -1 + (\frac{-1}{2}) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

2013. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Halla A^{-1}.
b) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ $\left(B^t \text{ es la matriz traspuesta de } B\right)$.
c) [0,5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}$.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1] = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos A^{-1} mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(cof\,(A)\right)^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$\left(cof\,(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B^t \cdot C$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = B^t \cdot C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1} y posteriormente $A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$.

La matriz inversa de A ya la tenemos calculada en el apartado a).

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Obtenemos la traspuesta de la matriz B.

$$B^t_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$ para obtener la matriz X.

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero si la propiedad asociativa, por tanto podríamos calcular el producto pedido como $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$ o $(A^{-1} \cdot B) \cdot C$.

$$B^t_{3x2} \cdot C_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 1\cdot 6 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 + 2\cdot 6 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 0\cdot 6 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot(6) + (-1)\cdot 16 + 0\cdot 2 \\ (-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 & (-2)\cdot 6 + (-1)\cdot 16 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 0\cdot 6 + 1\cdot 16 + (-2)\cdot 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 2 & -28 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}_{3x2}$

c) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

> A^n es n veces el producto de A, es decir $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$.
>
> Solo se puede calcular el determinante de matrices cuadradas, por lo tanto el determinante de B o B^t no podemos calcularlo, pero si realizamos el producto de ambas matrices obtendremos una matriz cuadrada, porque siempre que multiplicamos una matriz por su traspuesta nos dará una matriz cuadrada, a la cual si podremos calcularle su determinante.

$$\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| = \left[\begin{array}{l}\text{Denotamos } D_{3x3} \text{ a la matriz}\\ \text{obtenida del producto de}\\ \text{las matrices } B^t \text{ y } B\text{, es decir}\\ D_{3x3} = B^t_{3x2}\cdot B_{2x3}.\end{array}\right] =$$

$$= \left|A^{2013}D\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto}\\ \text{de dos matrices cuadradas}\\ \text{del mismo orden es igual al}\\ \text{producto de sus determinantes}\end{array}\right] =$$

$$= \overbrace{|A|\cdot|A|\cdots|A|}^{2013 \text{ veces}} \cdot D \cdot \overbrace{\left|A^{-1}\right|\cdot\left|A^{-1}\right|\cdots\left|A^{-1}\right|}^{2013 \text{ veces}} = |A|^{2013}\cdot D\cdot\left|A^{-2013}\right|^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual}\\ \text{a la inversa de su determinante:}\\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|\,; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I|\\ \text{como } |I|{=}1 \rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}\end{array}\right] =$$

$$= |A|^{2013}\cdot|D|\cdot\frac{1}{|A|^{2013}} = \frac{\cancel{|A|^{2013}}\cdot|D|}{\cancel{|A|^{2013}}} = |D| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Calculamos } D_{3x3}:\\ D = B^t_{3x2}\cdot B_{2x3} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}_{3x2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3x3}\\ |D| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si tenemos dos filas o columnas}\\ \text{propocioneales su determinante}\\ \text{vale cero, } F_2 = 4\cdot F_3\end{array}\right] = 0\end{array}\right] = 0$$

Solución:

El $\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| = 0$.

2013. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1 puntos] $det\,(-2A)$ y $det\left(A^{-1}\right)$.

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$.

Resolveremos ambos apartados aplicando las propiedades de los determinantes.

a)

$$|-2A| = \begin{vmatrix} -2\cdot a & -2\cdot b & -2\cdot c \\ -2\cdot d & -2\cdot e & -2\cdot f \\ -2\cdot p & -2\cdot q & -2\cdot r \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra} \\ \text{multiplicada por un mismo número, dicho número} \\ \text{podemos extraerlo fuera multiplicando al determinante.}\end{array}\right] =$$

$$= (-2)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2\cdot d & -2\cdot e & -2\cdot f \\ -2\cdot p & -2\cdot q & -2\cdot r \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-2)^3\cdot|A| =$$

$$= (-2)^3\cdot 4 = -32$$

$$\left|A^{-1}\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual} \\ \text{a la inversa de su determinante:} \\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|\,; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I| \\ \text{como } |I|\text{=}1 \to \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}\end{array}\right] = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

Solución:

El $|-2A| = -32$ y $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{4}$

b)

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante. En este caso tenemos a } F_2 \text{ multiplicada} \\ \text{por 2 y a } C_2 \text{ multiplicada por } -1. \end{array} \right] =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot |A| = 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8$$

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante. En este caso tenemos a } F_1 \text{ multiplicada} \\ \text{por } -3 \text{ y a } F_3 \text{ multiplicada por } -1. \end{array} \right] =$$

$$= (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determiante queda} \\ \text{multiplicado por } (-1) \text{, tantas veces como permutaciones se hayan} \\ \text{realizado, si nosotros intercambiamos la } F_1 \text{ por la } F_2 \text{ obtendremos} \\ \text{la matriz dada en el enunciado.} \end{array} \right] =$$

$$= (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = -3 \cdot 4 = -12$$

Solución:

El $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & f \end{vmatrix} = -8$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -12$

2013. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $det\,(M) = 2$. Calcula:
a) [0,5 puntos] El rango de M^3.
b) [0,75 puntos] El determinante de $2M^t$ $\left(M^t\right.$ es la matriz traspuesta de $\left.M\right)$.
c) [0,75 puntos] El determinante de $\left(M^{-1}\right)^2$.
d) [0,5 puntos] El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

Resolveremos todos los apartados aplicando las propiedades de los determinantes.

El rango de una matriz nos dice el número de filas o columnas que son linealmente independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el determinante de una matriz es diferente de cero no existe combinación lineal.

a)

$$\left|M^3\right| = |M \cdot M \cdot M| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto de}\\ \text{matrices cuadradas del mismo orden es}\\ \text{igual alproducto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$= |M| \cdot |M| \cdot |M| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8 \neq 0.$$

Como M^3 es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tendrá rango máximo en este caso es 3, es decir $r(M^3) = 3$.

Solución:

El rango de M^3 es 3 porque el $\left|M^3\right| = 8 \neq 0$.

b)

$$\left|2M^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra}\\ \text{multiplicada por un mismo número, dicho número}\\ \text{podemos extraerlo fuera multiplicando al determinante.}\\ \text{En este caso tenemos las tres filas multiplicadas por 2,}\\ \text{extrañendo un 2 por cada una de las filas.}\end{array}\right] = (2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot \left|M^t\right|$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz cuadrada}\\ \text{cuadrada coincide con el determinante}\\ \text{de su traspuesta.}\end{array}\right] = (2)^3 \cdot |M| = (2)^3 \cdot 2 = 16$$

Solución:

El $\left|2M^t\right| = 16$

c)

$$\left|\left(M^{-1}\right)^2\right| = \left|\left(M^{-1}\right)\cdot\left(M^{-1}\right)\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto de}\\ \text{matrices cuadradas del mismo orden es}\\ \text{igual alproducto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$= \left|\left(M^{-1}\right)\right|\cdot\left|\left(M^{-1}\right)\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual}\\ \text{a la inversa de su determinante:}\\ M\cdot M^{-1} = I; \left|M\cdot M^{-1}\right| = |I|\,; |M|\cdot\left|M^{-1}\right| = |I|\\ \text{como } |I|\text{=1} \rightarrow \left|M^{-1}\right| = \dfrac{1}{|M|}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|M|} = \frac{1}{|M|^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Solución:

El $\left|\left(M^{-1}\right)^2\right| = \dfrac{1}{4}$

d)

$$|N| = \left[\begin{array}{l}\text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determiante queda}\\ \text{multiplicado por } (-1)\text{, tantas veces como permutaciones se hayan}\\ \text{realizado. El enunciado nos dice que } N \text{ es igual que } M \text{ pero con las}\\ \text{dos primeras filas permutadas, si nosotros permutamos dichas filas.}\\ \text{obtendremos } M \text{ de la cual sabemos el valor de su determinante.}\end{array}\right] =$$

$$= (-1)\cdot|M| = (-1)\cdot 2 = -2$$

Solución:

El $|N| = -2$