Bloque 1: Matrices y Determinantes

Matriz

N-esima 2013

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO3.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.

b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa.

---

a) Para comprobar la igualdad dada necesitaremos calcular previamente $2 \cdot I$ y A^2.

$$2 \cdot I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A^2_{2x2} = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Para que se verifique la igualdad todos los componentes de las matrices obtenidas deben de coincidir.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Al coincidir todos sus elementos podemos afirmar que se verifica la igualdad.

Podemos calcular A^{-1} rápidamente si tratamos la igualdad dada como una ecuación matricial (si no nos diéramos cuenta podríamos calcular su inversa mediante determinantes o por Gauss).

$$A^2 = 2 \cdot I$$

Multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A^2 = 2I \rightarrow A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot 2 \cdot I$$

Como $A^2 = A \cdot A$ y $A \cdot A^{-1} = I$ tenemos que $I \cdot A = 2 \cdot A^{-1} \cdot I$

$$\text{y} \quad \begin{array}{l} I \cdot A = A \rightarrow A = 2 \cdot A^{-1} \\ A^{-1} \cdot I = A^{-1} \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación por $\frac{1}{2}$ para despejar la matriz identidad.

$$A = 2 \cdot A^{-1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot A^{-1}$$

La matriz A^{-1} es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A$$

Para obtenerla solamente debemos de calcular $\frac{1}{2} \cdot A$.

$$A^{-1}_{2x2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

la igualdad dada se cumple porque A^2 y $2 \cdot I$ son matrices iguales al coincidir cada uno de sus componentes y la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2x2}$

b) Para determinar A^{2013} de forma razonable por el apartado $a)$ sabemos que $A^2 = 2I$, por lo tanto se trata de una matriz cíclica que cada cierto número de multiplicaciones nos aparecerá $2^n \cdot I$, buscaremos cuantas veces se produce dicho ciclo dividiendo 2013 entre 2 y posteriormente aplicaremos la siguiente expresión.

Si $A^d = 2^n \cdot I$ y necesitamos A^D entonces sabemos que

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline \boxed{R} & C \end{array}$$

$$A^D = \left(A^d\right)^C \cdot A^R$$

En primer lugar dividiremos 2013 entre 2

$$\begin{array}{l|l} 2013 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 1006 \end{array}$$

Aplicamos la expresión anterior para determinar A^{2013}

$$A^{2013} = \left(A^2\right)^{1006} \cdot A^1$$

Como $A^2 = 2 \cdot I \rightarrow A^{2013} = (2 \cdot I)^{1006} \cdot A$

y $\quad (2 \cdot I)^{1006} = 2^{1006} \cdot I \rightarrow A^{2013} = 2^{1006} \cdot I \cdot A$

Uno de los métodos para calcular la matriz enésima consiste en buscar un patrón, es decir que encontremos una progresión en los coeficientes de la propia matriz, o bien que nuestra matriz sea cíclica y cada cierto número de multiplicaciones nos aparezca la misma matriz.

La potencia enésima de una matriz diagonal A es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal se encuentran elevados a dicha potencia.

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{pmatrix}$$

En nuestro caso al tratarse de la matriz identidad su enésima potencia será siempre dicha matriz, recuerda que al elevar el valor 1 a cualquier exponente real obtendremos el mismo valor.

$$I^n = I$$

Sabemos que $\quad I \cdot A = A \rightarrow A^{2013} = 2^{1006} \cdot A$

$$A^{2013} = 2^{1006} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2^{1006} \cdot 1 & 2^{1006} \cdot 1 \\ 2^{1006} \cdot 1 & 2^{1006} \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Para calcular $\left(A^{2013}\right)^{-1}$ por las propiedades de las matrices si tenemos un número real k y A una matriz invertible se verifica que $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}(A)^{-1}$, por tanto:

$$\text{Como } A^{2013} = 2^{1006} \cdot A \rightarrow \left(A^{2013}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{1006}} \cdot A^{-1}$$

La inversa de la matriz A es $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$, calculada en el apartado anterior aplicando la expresión anterior obtendremos la inversa pedida.

$$\left(A^{2013}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{1006}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \frac{1}{2^{1007}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

Las matrices pedidas son $A^{2013} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}_{2x2}$ y $\left(A^{2013}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix}_{2x2}$