Bloque 1: Matrices y Determinantes

Matriz

Inversa 2013

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] Determina los valores de m para los que los vectores filas de M son linealmente independientes.

b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m.

c) [0,75 puntos] Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

---

a) Calculamos $|M|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de m para los cuales existe combinación lineal.

> El rango nos indica el número de filas o columnas que son independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|M| = 0$ existe combinación lineal entre ellas, al imponerle dicha condición descubriremos los valores de m para los cuales existe combinación lineal.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{m+1} & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{1} & m-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \cdot [1 \cdot (m-1) - 1 \cdot (-1)] = m \cdot (m+1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = m \cdot (m+1) \\ |A| = 0 \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} m \cdot (m+1) = 0 \\ m+1 = 0 \rightarrow m_1 = -1 \\ m_2 = 0 \end{array}$$

Los únicos valores que provocan que la matriz M posea combinación lineal en los vectores filas son $m_1 = -1$ y $m_2 = 0$, por lo tanto para el resto de valores no existirá combinación lineal.

Solución:

Los vectores filas de la matriz M serán linealmente independientes para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

b) M es una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, en consecuencia sabemos que su rango se encontrará comprendido entre 1 y 3.

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Si observamos detenidamente la matriz M, nos damos cuenta de que existe un menor de orden 2 que no depende del parámetro m, cuyo determinantes es distinto de cero, así que $r(A) \geq 2, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)\cdot(1) - (1)\cdot(0) = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

Por ello el rango de la matriz A se encontrará comprendido entre $2 \leq r(A) \leq 3$.

Por el apartado anterior sabemos que existirá combinación lineal para $m_1 = -1$ y $m_2 = 0$, por lo tanto si toma distinto valores la matriz M tendrá rango máximo porque $|M| \neq 0$, mientras que si toma dichos valores el determinante del único menor de orden 3 será cero y su rango será 2.

Solución:

$\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$el $r(M) = 3$.
Para $m_1 = -1$ y $m_2 = 0$ el $r(M) = 2$.

c) Para $m = 1$ tenemos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|M|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso m, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

La matriz M posee inversa porque según el apartado anterior nuestra $m \neq -1$ *y* 0 y , así que para $m = 1$ el $|M| \neq 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(M)^{-1} = \frac{1}{|M|}(cof(M))^t \tag{1}$$

$\lvert M\rvert = m \cdot (m+1)$ para $m = 1$	$\lvert M\rvert = (1)\cdot(1+1) = 2$

$$M=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}_{3x3}\rightarrow cof\left(M\right)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}&(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\2&0\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\left(M\right)=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-1&1&-1\\2&0&2\end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$\left(cof\left(M\right)\right)^t=\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$M^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}_{3x3}=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{-1}{2}&1\end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La inversa de la matriz M para $m=1$ es $M^{-1}_{3x3}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}_{3x3}=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{-1}{2}&1\end{pmatrix}$

2013. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.

b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa.

---

a) Para comprobar la igualdad dada necesitaremos calcular previamente $2 \cdot I$ y A^2.

$$2 \cdot I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A^2_{2x2} = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Para que se verifique la igualdad todos los componentes de las matrices obtenidas deben de coincidir.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Al coincidir todos sus elementos podemos afirmar que se verifica la igualdad.

Podemos calcular A^{-1} rápidamente si tratamos la igualdad dada como una ecuación matricial (si no nos diéramos cuenta podríamos calcular su inversa mediante determinantes o por Gauss).

$$A^2 = 2 \cdot I$$

Multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A^2 = 2I \rightarrow A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot 2 \cdot I$$

Como $A^2 = A \cdot A$ y $A \cdot A^{-1} = I$ tenemos que $I \cdot A = 2 \cdot A^{-1} \cdot I$

y $\quad I \cdot A = A \rightarrow A = 2 \cdot A^{-1}$
$\quad A^{-1} \cdot I = A^{-1}$

Multiplicamos la ecuación por $\frac{1}{2}$ para despejar la matriz identidad.

$$A = 2 \cdot A^{-1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot A^{-1}$$

La matriz A^{-1} es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A$$

Para obtenerla solamente debemos de calcular $\frac{1}{2} \cdot A$.

$$A^{-1}_{2x2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

la igualdad dada se cumple porque A^2 y $2 \cdot I$ son matrices iguales al coincidir cada uno de sus componentes y la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2x2}$

b) Para determinar A^{2013} de forma razonable por el apartado $a)$ sabemos que $A^2 = 2I$, por lo tanto se trata de una matriz cíclica que cada cierto número de multiplicaciones nos aparecerá $2^n \cdot I$, buscaremos cuantas veces se produce dicho ciclo dividiendo 2013 entre 2 y posteriormente aplicaremos la siguiente expresión.

Si $A^d = 2^n \cdot I$ y necesitamos A^D entonces sabemos que

$$\begin{array}{c|c} D & \underline{d} \\ \boxed{R} & C \end{array}$$

$A^D = \left(A^d\right)^C \cdot A^R$

En primer lugar dividiremos 2013 entre 2

$$\begin{array}{c|c} 2013 & \underline{2} \\ & 1006 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

Aplicamos la expresión anterior para determinar A^{2013}

$A^{2013} = \left(A^2\right)^{1006} \cdot A^1$

Como $A^2 = 2 \cdot I \to A^{2013} = (2 \cdot I)^{1006} \cdot A$

y $\quad (2 \cdot I)^{1006} = 2^{1006} \cdot I \to A^{2013} = 2^{1006} \cdot I \cdot A$

Uno de los métodos para calcular la matriz enésima consiste en buscar un patrón, es decir que encontremos una progresión en los coeficientes de la propia matriz, o bien que nuestra matriz sea cíclica y cada cierto número de multiplicaciones nos aparezca la misma matriz.

La potencia enésima de una matriz diagonal A es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal se encuentran elevados a dicha potencia.

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{pmatrix}$$

En nuestro caso al tratarse de la matriz identidad su enésima potencia será siempre dicha matriz, recuerda que al elevar el valor 1 a cualquier exponente real obtendremos el mismo valor.

$$I^n = I$$

Sabemos que $\quad I \cdot A = A \rightarrow A^{2013} = 2^{1006} \cdot A$

$$A^{2013} = 2^{1006} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2^{1006} \cdot 1 & 2^{1006} \cdot 1 \\ 2^{1006} \cdot 1 & 2^{1006} \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Para calcular $\left(A^{2013}\right)^{-1}$ por las propiedades de las matrices si tenemos un número real k y A una matriz invertible se verifica que $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}(A)^{-1}$, por tanto:

$$\text{Como } A^{2013} = 2^{1006} \cdot A \rightarrow \left(A^{2013}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{1006}} \cdot A^{-1}$$

La inversa de la matriz A es $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$, calculada en el apartado anterior aplicando la expresión anterior obtendremos la inversa pedida.

$$\left(A^{2013}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{1006}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \frac{1}{2^{1007}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

Las matrices pedidas son $A^{2013} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}_{2x2}$ y $\left(A^{2013}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix}_{2x2}$

2013. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1}.
b) [0,25 puntos] Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.
c) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$ y $|B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot [1 \cdot 1 - 1 \cdot 0] = 2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & -1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = 0 \rightarrow \nexists B^{-1}$$

Como $|B| = 0$ la matriz B no tiene inversa mientras que $|A| \neq 0$ la matriz posee inversa, obtenemos A^{-1} mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

Solo es posible realizar la inversa de la matriz A porque es la única que su determinante es distinto de cero, siendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

A^n es n veces el producto de A, es decir

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$$

$$\left|AB^{2013}A^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto} \\ \text{de dos matrices cuadradas del} \\ \text{mismo orden es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$= |A| \cdot \overbrace{|B| \cdot |B| \cdots |B|}^{\text{2013 veces}} \cdot \left|A^t\right| = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot \left|A^t\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz cuadrada} \\ \text{coincide con el determinante de su} \\ \text{traspuesta.}\end{array}\right] = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot |A| = 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Solución:

El $\left|AB^{2013}A^t\right| = 0$.

c) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X - B = A \cdot B$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$A \cdot X - B = A \cdot B \to A \cdot X = A \cdot B + B$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$A \cdot X = A \cdot B + B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot B + A^{-1} \cdot B$

Como $A^{-1} \cdot A = I \to I \cdot X = I \cdot B + A^{-1} \cdot B$

y $\left. \begin{array}{r} I \cdot X = X \\ I \cdot B = B \end{array} \right| \to X = B + A^{-1} \cdot B$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = B + A^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, $A^{-1} \cdot B$ y posteriormente $B + A^{-1} \cdot B$.

La matriz inversa de A la calculamos en el apartado a).

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$.

$$A^{-1}_{3x3} \cdot B_{3x3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $B + A^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = B + A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+(-1) & 1+1 & 1+\frac{3}{2} \\ 1+2 & -1+(-2) & 1+\left(\frac{-1}{2}\right) \\ 0+0 & 0+0 & -1+\left(\frac{-1}{2}\right) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

2013. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Halla A^{-1}.
b) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ $\left(B^t \text{ es la matriz traspuesta de } B\right)$.
c) [0,5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}$.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1] = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos A^{-1} mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(cof\,(A))^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B^t \cdot C$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = B^t \cdot C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1} y posteriormente $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$.

La matriz inversa de A ya la tenemos calculada en el apartado a).

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Obtenemos la traspuesta de la matriz B.

$$B^t_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$ para obtener la matriz X.

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero si la propiedad asociativa, por tanto podríamos calcular el producto pedido como $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$ o $(A^{-1} \cdot B) \cdot C$.

$$B^t_{3x2} \cdot C_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot (6) + (-1) \cdot 16 + 0 \cdot 2 \\ (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-2) \cdot 6 + (-1) \cdot 16 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot 6 + 1 \cdot 16 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 2 & -28 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}_{3x2}$

c) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

A^n es n veces el producto de A, es decir $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$.

Solo se puede calcular el determinante de matrices cuadradas, por lo tanto el determinante de B o B^t no podemos calcularlo, pero si realizamos el producto de ambas matrices obtendremos una matriz cuadrada, porque siempre que multiplicamos una matriz por su traspuesta nos dará una matriz cuadrada, a la cual si podremos calcularle su determinante.

$$\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| = \left[\begin{array}{l}\text{Denotamos } D_{3x3} \text{ a la matriz}\\ \text{obtenida del producto de}\\ \text{las matrices } B^t \text{ y } B\text{, es decir}\\ D_{3x3} = B^t_{3x2}\cdot B_{2x3}.\end{array}\right] =$$

$$= \left|A^{2013}D\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto}\\ \text{de dos matrices cuadradas}\\ \text{del mismo orden es igual al}\\ \text{producto de sus determinantes}\end{array}\right] =$$

$$= \overbrace{|A|\cdot|A|\cdots|A|}^{\text{2013 veces}} \cdot D \cdot \overbrace{\left|A^{-1}\right|\cdot\left|A^{-1}\right|\cdots\left|A^{-1}\right|}^{\text{2013 veces}} = |A|^{2013}\cdot D\cdot\left|A^{-2013}\right|^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual}\\ \text{a la inversa de su determinante:}\\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|\,; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I|\\ \text{como } |I|{=}1 \to \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}\end{array}\right] =$$

$$= |A|^{2013}\cdot|D|\cdot\frac{1}{|A|^{2013}} = \frac{\cancel{|A|^{2013}}\cdot|D|}{\cancel{|A|^{2013}}} = |D| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Calculamos } D_{3x3}:\\ D = B^t_{3x2}\cdot B_{2x3} = \begin{pmatrix}0&1\\2&2\\1&0\end{pmatrix}_{3x2}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix}1&2&0\\4&8&2\\1&2&1\end{pmatrix}_{3x3}\\ |D| = \begin{vmatrix}1&2&0\\4&8&2\\1&2&1\end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si tenemos dos filas o columnas}\\ \text{propocioneales su determinante}\\ \text{vale cero, } F_2 = 4\cdot F_3\end{array}\right] = 0\end{array}\right] = 0$$

Solución:

El $\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| = 0.$