## Bloque 1: Matrices y Determinantes

# Ecuaciones

# Matriciales 2013

## ESTRUCTURA

**Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.**


## AGRADECIMIENTOS

**Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.**

**No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.**

Mr.Wh1t3

# TABLA DE CONTENIDO

## 2013. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**a) [1 punto]** Halla, si es posible, $A^{-1}$ y $B^{-1}$.
**b) [0,25 puntos]** Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo $A^t$ la matriz traspuesta de $A$.
**c) [1,25 puntos]** Calcula la matriz $X$ que satisface $AX - B = AB$.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$ y $|B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot [1 \cdot 1 - 1 \cdot 0] = 2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & -1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = 0 \rightarrow \nexists B^{-1}$$

Como $|B| = 0$ la matriz $B$ no tiene inversa mientras que $|A| \neq 0$ la matriz posee inversa, obtenemos $A^{-1}$ mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

**Solución:**

Solo es posible realizar la inversa de la matriz $A$ porque es la única que su determinante es distinto de cero, siendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

$A^n$ es $n$ veces el producto de $A$, es decir

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$$

$$\left|AB^{2013}A^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto} \\ \text{de dos matrices cuadradas del} \\ \text{mismo orden es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$= |A| \cdot \overbrace{|B| \cdot |B| \cdots |B|}^{\text{2013 veces}} \cdot \left|A^t\right| = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot \left|A^t\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz cuadrada} \\ \text{coincide con el determinante de su} \\ \text{traspuesta.}\end{array}\right] = |A| \cdot |B|^{2013} \cdot |A| = 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

**Solución:**

El $\left|AB^{2013}A^t\right| = 0.$

c) Despejamos la matriz $X$ de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X - B = A \cdot B$$

Pasaremos la matriz $B$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$A \cdot X - B = A \cdot B \rightarrow A \cdot X = A \cdot B + B$

Como $A$ se encuentra a la izquierda de la matriz $X$, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por $A^{-1}$.

$A \cdot X = A \cdot B + B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot B + A^{-1} \cdot B$

Como $A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = I \cdot B + A^{-1} \cdot B$

y $\left.\begin{array}{r} I \cdot X = X \\ I \cdot B = B \end{array}\right| \rightarrow X = B + A^{-1} \cdot B$

La matriz $X$ es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = B + A^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $A^{-1}$, $A^{-1} \cdot B$ y posteriormente $B + A^{-1} \cdot B$.

La matriz inversa de $A$ la calculamos en el apartado a).

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$.

$$A^{-1}_{3x3} \cdot B_{3x3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $B + A^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz $X$.

$$X = B + A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+(-1) & 1+1 & 1+\frac{3}{2} \\ 1+2 & -1+(-2) & 1+(\frac{-1}{2}) \\ 0+0 & 0+0 & -1+(\frac{-1}{2}) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

**Solución:**

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$

## 2013. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

**a) [0,75 puntos]** Halla $A^{-1}$.
**b) [1,25 puntos]** Calcula la matriz $X$ que satisface $AX = B^tC$ ($B^t$ es la matriz traspuesta de $B$).
**c) [0,5 puntos]** Halla el determinante de $A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}$.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1] = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos $A^{-1}$ mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(cof\left(A\right)\right)^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\left(A\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\left(A\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$\left(cof\left(A\right)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

**Solución:**

La matriz inversa de $A$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$

b) Despejamos la matriz $X$ de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B^t \cdot C$$

Como $A$ se encuentra a la izquierda de la matriz $X$, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por $A^{-1}$.

$$A \cdot X = B^t \cdot C \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \to I \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \to X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

La matriz $X$ es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $A^{-1}$ y posteriormente $A^{-1} \cdot \left(B^t \cdot C\right)$.

La matriz inversa de $A$ ya la tenemos calculada en el apartado a).

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Obtenemos la traspuesta de la matriz $B$.

$$B^t_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$ para obtener la matriz $X$.

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero si la propiedad asociativa, por tanto podríamos calcular el producto pedido como $A^{-1} \cdot (B^t \cdot C)$ o $(A^{-1} \cdot B) \cdot C$.

$$B^t_{3x2} \cdot C_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$X = A^{-1} \cdot (B^t \cdot C) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot (6) + (-1) \cdot 16 + 0 \cdot 2 \\ (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-2) \cdot 6 + (-1) \cdot 16 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot 6 + 1 \cdot 16 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 2 & -28 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}_{3x2}$$

**Solución:**

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}_{3x2}$

c) Resolvemos este apartado aplicando las propiedades de los determinantes y ciertos cálculos realizados en el apartado anterior.

$A^n$ es $n$ veces el producto de $A$, es decir $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$.

Solo se puede calcular el determinante de matrices cuadradas, por lo tanto el determinante de $B$ o $B^t$ no podemos calcularlo, pero si realizamos el producto de ambas matrices obtendremos una matriz cuadrada, porque siempre que multiplicamos una matriz por su traspuesta nos dará una matriz cuadrada, a la cual si podremos calcularle su determinante.

$$\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| = \left[\begin{array}{l}\text{Denotamos } D_{3x3} \text{ a la matriz} \\ \text{obtenida del producto de} \\ \text{las matrices } B^t \text{ y } B\text{, es decir} \\ D_{3x3} = B^t_{3x2} \cdot B_{2x3}.\end{array}\right] =$$

$$= \left|A^{2013}D\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto} \\ \text{de dos matrices cuadradas} \\ \text{del mismo orden es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes}\end{array}\right] =$$

$$= \overbrace{|A|\cdot|A|\cdots|A|}^{\text{2013 veces}} \cdot D \cdot \overbrace{\left|A^{-1}\right|\cdot\left|A^{-1}\right|\cdots\left|A^{-1}\right|}^{\text{2013 veces}} = |A|^{2013}\cdot D\cdot\left|A^{-2013}\right|^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual} \\ \text{a la inversa de su determinante:} \\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|\,; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I| \\ \text{como } |I|{=}1 \to \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}\end{array}\right] =$$

$$= |A|^{2013}\cdot|D|\cdot\frac{1}{|A|^{2013}} = \frac{\cancel{|A|^{2013}}\cdot|D|}{\cancel{|A|^{2013}}} = |D| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Calculamos } D_{3x3}: \\ D = B^t_{3x2}\cdot B_{2x3} = \begin{pmatrix}0&1\\2&2\\1&0\end{pmatrix}_{3x2}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix}1&2&0\\4&8&2\\1&2&1\end{pmatrix}_{3x3} \\ |D| = \begin{vmatrix}1&2&0\\4&8&2\\1&2&1\end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si tenemos dos filas o columnas} \\ \text{propocioneales su determinante} \\ \text{vale cero, } F_2 = 4\cdot F_3\end{array}\right] = 0\end{array}\right] = 0$$

**Solución:**

El $\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right| = 0.$

## 2013. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sean $A$ y $B$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

**a) [1,25 puntos]** Calcula las matrices $X$ e $Y$ para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.
**b) [1,25 puntos]** Halla la matriz $Z$ que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ ($I$ denota la matriz identidad y $B^t$ la matriz traspuesta de $B$).

---

Los sistemas de ecuaciones matriciales los podemos resolver por igualación, sustitución, reducción o doble reducción.

a) Se trata de un sistema matricial que resolveremos fácilmente por reducción.

$$\begin{array}{c} 2X - Y = A \\ X - 3Y = B \end{array} \xrightarrow{-2} \begin{array}{c} 2X - Y = A \\ \underline{-2X + 6Y = -2B} \\ 5Y = A - 2B \\ Y = \frac{1}{5} \cdot (A - 2B) \end{array}$$

Primero resolvemos la matriz $Y$ realizando las siguientes operaciones $2B$, $A - 2B$ y posteriormente $\frac{1}{5} \cdot (A - 2B)$.

$$2 \cdot B_{2x2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-9) & 2 \cdot (5) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A_{2x2} - 2 \cdot B_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2-2 & -3-(-8) \\ -3-(-18) & 5-10 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $\frac{1}{5} \cdot (A - 2B)$ para obtener la matriz $Y$.

$$Y = \frac{1}{5} \cdot (A - 2B) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 0 & \frac{1}{5} \cdot 5 \\ \frac{1}{5} \cdot 15 & \frac{1}{5} \cdot (-5) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Una vez obtenida la matriz $Y$ despejamos la matriz $X$ de una de las ecuaciones dadas, por ejemplo:

$$X - 3Y = B$$

Pasamos la matriz $3Y$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X - 3Y = B \to X = B + 3Y$$

Para obtener la matriz $X$ calcularemos $3Y$ y a continuación $B + 3Y$.

$$3 \cdot Y_{2x2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$X = B_{2x2} + 3Y_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1+0 & -4+3 \\ -9+9 & 5+(-3) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

**Solución:**

La matrices pedidas que cumplen las ecuaciones dadas en el enunciado son $X_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$ y $Y_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$

b) Despejamos la matriz $Z$ de la siguiente ecuación matricial:

$$B^2 + Z \cdot A + B^t = 3 \cdot I$$

Pasamos la matriz $B^2$ y $B^t$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$B^2 + Z \cdot A + B^t = 3 \cdot I \rightarrow Z \cdot A = 3 \cdot I - B^2 - B^t$$

Como $A$ se encuentra multiplicando a la derecha de la matriz $Z$, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por $A^{-1}$.

$$Z \cdot A = 3 \cdot I - B^2 - B^t \rightarrow Z \cdot A \cdot A^{-1} = \left(3 \cdot I - B^2 - B^t\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow Z \cdot I = \left(3 \cdot I - B^2 - B^t\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad Z \cdot I = Z \rightarrow Z = \left(3 \cdot I - B^2 - B^t\right) \cdot A^{-1}$$

La matriz $Z$ es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$Z = \left(3 \cdot I - B^2 - B^t\right) \cdot A^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $A^{-1}$, $3 \cdot I$, $B^2$, $B^t$, $3I - B^2 - B^t$ y por último $\left(3 \cdot I - B^2 - B^t\right) \cdot A^{-1}$. Antes de nada comprobaremos que $A$ tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} cof\,(A) \qquad (1)$$

Una matriz cuadrada $A$ es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir si $A = A^t$. La inversa de una matriz simétrica es simétrica por lo tanto la expresión para calcular su inversa la podemos reescribir como

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} cof\,(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{1+2} \cdot (-3) \\ (-1)^{2+1} \cdot (-3) & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos $3 \cdot I$, $B^2$, $B^t$, $3I - B^2 - B^t$

$$3 \cdot I_{2x2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$B^2 = B_{2x2} \cdot B_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-9) & 1 \cdot (-4) + (-4) \cdot 5 \\ -9 \cdot 1 + 5 \cdot (-9) & -9 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 37 & -24 \\ -54 & 61 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B^t_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$3 \cdot I_{2x2} - B^2_{2x2} - B^t_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 37 & -24 \\ -54 & 61 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 37 - 1 & 0 - (-24) - (-9) \\ 0 - (-54) - (-4) & 3 - 61 - 5 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $(3 \cdot I - B^2 - B^t) \cdot A^{-1}$ para obtener la matriz $Z$.

$$Z = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -35 \cdot 5 + 33 \cdot 3 & -35 \cdot 3 + 33 \cdot 2 \\ 58 \cdot 5 + (-63) \cdot 3 & 58 \cdot 3 + (-63) \cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}_{2x2}$$

**Solución:**

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $Z_{2x2} = \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}_{2x2}$

## 2013. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**a) [1,25 puntos]** Calcula $X$ e $Y$ tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ ($A^t$ es la matriz traspuesta de $A$)

**b) [1,25 puntos]** Calcula $Z$ tal que $AZ = BZ + A$.

---

a) Se trata de un sistema matricial que resolveremos fácilmente por reducción.

Los sistemas de ecuaciones matriciales los podemos resolver por igualación, sustitución, reducción o doble reducción.

$$\begin{array}{lcl} X - Y = A^t & \xrightarrow{-1} & -X + Y = -A^t \\ 2X - Y = B & & \underline{2X - Y = B} \\ & & X = B - A^t \end{array}$$

Primero resolvemos la matriz $X$ realizando las siguientes operaciones $A^t$ y posteriormente $B - A^t$.

$$A^t_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $B - A^t$ para obtener la matriz $X$.

$$X_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & -1-0 \\ 1-2 & 0-1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Una vez obtenida la matriz $X$ despejamos la matriz $Y$ de una de las ecuaciones dadas, por ejemplo:

$$X - Y = A^t$$

Pasamos la matriz $Y$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X - Y = A^t \rightarrow X = Y + A^t$$

Pasamos la matriz $A^t$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X = Y + A^t \rightarrow X - A^t = Y$$

La matriz $Y$ es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$Y = X - A^t$$

Para obtener la matriz $Y$ calcularemos $X - A^t$.

$$Y_{2x2} = X_{2x2} - A^t_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2-(-1) & -1-0 \\ -1-2 & -1-1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

**Solución:**

La matrices pedidas que cumplen las ecuaciones dadas en el enunciado son $X_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$ y $Y_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$

b) Despejamos la matriz $Z$ de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot Z = B \cdot Z + A$$

Pasamos la matriz $B \cdot Z$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A \cdot Z = B \cdot Z + A \rightarrow A \cdot Z - B \cdot Z = A$$

Nos encontramos dos matrices $Z$, para poder despejarla debemos sacarle factor común por el lado correcto, en este caso como $Z$ está multiplicando por la derecha de las matrices $A$ y $B$ se encontrará por ese mismo lado al sacar factor común.

$$A \cdot Z - B \cdot Z = A \rightarrow (A - B) \cdot Z = A$$

Denotaremos $C$ a la matriz obtenida de realizar la operación $A - B$.

$$\begin{aligned} C &= A - B \\ C \cdot Z &= A \end{aligned}$$

Como $C$ se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz $Z$, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por $C^{-1}$.

$$C \cdot Z = A \rightarrow C^{-1} \cdot C \cdot Z = C^{-1} \cdot A$$

$$\text{Como } C^{-1} \cdot C = I \rightarrow I \cdot Z = C^{-1} \cdot A$$

$$\text{y} \quad I \cdot Z = Z \rightarrow Z = C^{-1} \cdot A$$

La matriz $Z$ es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$Z = C^{-1} \cdot A$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $C^{-1}$ y $C^{-1}\cdot A$. Antes de nada comprobaremos que $C$ tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero, para ello calcularemos nuestra matriz $C$.

$$C_{2x2}=A_{2x2}-B_{2x2}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{2x2}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}_{2x2}=\begin{pmatrix}-1-1 & 2-(-1)\\ 0-1 & 1-0\end{pmatrix}_{2x2}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}_{2x2}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot 1-(-1)\cdot 3=1\neq 0\rightarrow \exists C^{-1}$$

Como $|C|\neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(C)^{-1}=\frac{1}{|C|}\left(cof\,(C)\right)^t \tag{1}$$

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}_{2x2}\rightarrow cof\,(C)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\cdot 1 & (-1)^{1+2}\cdot -1\\ (-1)^{2+1}\cdot 3 & (-1)^{2+2}\cdot(-2)\end{pmatrix}_{2x2}$$

$$cof\,(C)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}_{2x2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$\left(cof\,(C)\right)^t=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2x2}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$C^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $C^{-1}\cdot A$ para obtener la matriz $Z$.

$$Z=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{2x2}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-3)\cdot 1\\ 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-2)\cdot 1\end{pmatrix}_{2x2}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}_{2x2}$$

**Solución:**

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $Z_{2x2}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}_{2x2}$