Bloque 2: Sistema de Ecuaiones Lineales

Discusión de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2013

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-4y+6z &=& 6\\ my+2z &=& m+1\\ -3x+6y-3mz &=& -9 \end{array}\right.$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0,75 puntos] Resuélvelo para $m=3$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $y=0$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-4y+6z &=& 6\\ my+2z &=& m+1\\ -3x+6y-3mz &=& -9 \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6\\ 0 & m & 2 & m+1\\ -3 & 6 & -3m & -9 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6\\ 0 & m & 2\\ -3 & 6 & -3m \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6\\ 0 & m & 2 & m+1\\ -3 & 6 & -3m & -9 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro m en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de m que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6\\ 0 & m & 2\\ -3 & 6 & -3m \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada}\\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera}\\ \text{multiplicando al determinante, } F_1 \text{ está multiplicada por 2 y}\\ \text{la } F_3 \text{ se encuentra mutliplicada por 3.}\end{array}\right]=$$

$$=2\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3\\ 0 & m & 2\\ -1 & 2 & -m \end{vmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3+F_1} 2\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & \cancel{3}\\ 0 & m & \cancel{2}\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3-m} \end{vmatrix}=2\cdot3\cdot(3-m)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 0 & m \end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot(3-m)\cdot(1\cdot m-0\cdot(-2))=6\cdot m\cdot(3-m)$$

$$\begin{array}{rc} |A|= & 6\cdot m\cdot(3-m)\\ |A'|= & 0 \end{array}\ \Bigg|\ 6\cdot m\cdot(3-m)=0\ \left\{\begin{array}{l} 6\neq0\\ m_1=0\\ 3-m=0\rightarrow m_2=3 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $m_1 = 0$, $m_2 = 3$ y $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & m & 2 \\ -3 & 6 & -3m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 6 = 4 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall m \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $m_1 = 0$ y $m_2 = 3$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para los casos $m_1 = 0$ y $m_2 = 3$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro m toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de m aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $m_1 = 0$.

Sustituimos el valor $m = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente

- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada} \\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera} \\ \text{multiplicando al determinante, } F_1 \text{está multiplicada por 2 y} \\ \text{la } F_3 \text{se encuentra mutliplicada por 3.} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_1} 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 2 & 1 \\ \cancel{0} & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = -18 \neq 0 \rightarrow r(A') = 3$$

ii) Para $m_2 = 3$.

Sustituimos el valor $m = 3$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & -9 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 2C_2} \begin{vmatrix} 2 & \cancel{6} & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ -3 & \cancel{-9} & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 8 - (-3) \cdot (-6)) = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\}$.

Si nuestro sistema toma valores distintos de $m_1 = 0$ y $m_2 = 3$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $m = 0 \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $m = 3 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $m = 3$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), en consecuencia debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{ \begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 6 \\ 3y + 2z &= 4 \\ \cancel{-3x + 6y - 6z} &\cancel{= -9} \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 6 \\ 3y + 2z &= 4 \end{aligned} \right.$$

Nuestro sistema ya se encuentra escalonado así que a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta; \forall \theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y + 6z &=& 6 \\ 3y + 2z &=& 4 \\ z &=& \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y + 6 \cdot (\theta) &=& 6 \\ 3y + 2 \cdot (\theta) &=& 4 \\ z &=& \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} 2x - 4y &=& 6 - 6\theta \\ y &=& \dfrac{4 - 2\theta}{3} \\ z &=& \theta \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} 2x - 4 \cdot \left(\dfrac{4 - 2\theta}{3} \right) &=& 6 - 6\theta \\ y &=& \dfrac{4 - 2\theta}{3} \\ z &=& \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x &=& \dfrac{17 - 13\theta}{3} \\ y &=& \dfrac{4 - 2\theta}{3} \\ z &=& \theta \end{array} \right. , \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R} \ .$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{17 - 13\theta}{3};\ \frac{4 - 2\theta}{3};\ \theta \right)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Como el enunciado nos pregunta si es posible encontrar una solución para que $y = 0$, igualamos el nuevo valor al obtenido anteriormente.

$$\left\{\begin{array}{rcr} y & = & 0 \\ y & = & \dfrac{4-2\theta}{3} \end{array}\right. \rightarrow \frac{4-2\theta}{3} = 0; \quad 4-2\theta = 0; \rightarrow \theta = 2$$

Para $\theta = 2$ se satisface la condición impuesto, siendo la solución del sistema $\left\{\begin{array}{rr} x = & -3 \\ y = & 0 \\ z = & 2 \end{array}\right.$

Pudiendo expresarse como $(x,\ y,\ z) = (-3;\ 0;\ 2)$

Solución:

La solución del sistema para $m = 3$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{17-13\theta}{3} \\ y & = & \dfrac{4-2\theta}{3} \\ z & = & \theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{17-13\theta}{3};\ \frac{4-2\theta}{3};\ \theta\right)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Para $\theta = 2$ existirá una solución que satisface $y = 0$, siendo la solución del sistema para este caso $(x,\ y,\ z) = (-3;\ 0;\ 2)$.

2013. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Sean

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & m & m-2\\ m & 0 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \; y \; X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a) [1,25 puntos] Determina el rango de A según los valores del parámetro m.
b) [0,75 puntos] Discute el sistema $AX=B$ según los valores del parámetro m.
c) [0,75 puntos] Resuelve el sistema $AX=B$ para $m=1$.

---

a) A es una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, por lo tanto sabemos que su rango siempre irá comprendido entre

$$1\leq r\left(A\right)\leq min\left\{filas,\ columnas\right\}$$

$$1\leq r\left(A\right)\leq 3$$

El rango nos indica el número de filas o columnas que son independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A|=0$ existe combinación lineal entre ellas, al imponerle dicha condición descubriremos los valores de m para los cuales existe combinación lineal.

Calculamos el $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & m & m-2\\ m & 0 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2-mF_1}\begin{vmatrix}\cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-3}\\ 2m-1 & \cancel{0} & 4m-2\\ m & \cancel{0} & 2\end{vmatrix}=-\left(1\right)\cdot\begin{vmatrix}2m-1 & 4m-2\\ m & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot\left[\left(2m-1\right)\cdot 2-m\cdot\left(4m-2\right)\right]=-\left(4m-2-4m^2+2m\right)=4m^2-6m+2$$

Imponemos la condición $|A|=0$:

$$\left.\begin{array}{rcl}|A| & = & 4m^2-6m+2\\ |A| & = & 0\end{array}\right| \; 4m^2-6m+2=0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$4m^2-6m+2=0\rightarrow m=\frac{6\pm\sqrt{\left(-6\right)^2-4\cdot 4\cdot 2}}{2\cdot 4}=\frac{6\pm 2}{8}=\left\{\begin{array}{l}x_1=\dfrac{6-2}{8}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}\\ x_2=\dfrac{6+2}{8}=\dfrac{8}{8}=1\end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de la matriz A, para los casos: $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = 1$ y $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

i) Para $m_1 = \frac{1}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de m el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-2) \cdot \frac{1}{2} - (-1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

ii) Para $m_2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de m el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

iii)Para $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ el $|A| \neq 0$, puesto que los únicos valores que lo hacían cero eran $m = \frac{1}{2}$ y $m = 1$, así que siempre tenderemos un menor de orden 3 cuyo determinante será distinto de cero y en consecuencia el $r(A) = 3$.

Solución:

Para $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ el $r(A) = 3$.

Para $m = \frac{1}{2}$ el $r(A) = 2$.
Para $m = 1$ el $r(A) = 2$.

b) Transformamos la ecuación matricial $AX = B$ en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que definen a la matriz A y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & m & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & m & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro m en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de m que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero, todo este proceso ya lo tenemos resuelto en el apartado anterior, por lo tanto solo es necesario calcular el rango de la matriz A' en los siguientes casos: $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = 1$ y $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

Antes de empezar a estudiar el rango de la matriz A' nos podemos dar cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,así que tendremos siempre los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A, llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

i) Para $m_1 = \frac{1}{2}$.

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} \cancel{-2} & 1 & 1 \\ \cancel{-1} & \frac{1}{2} & 1 \\ \cancel{\frac{1}{2}} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{4} \neq 0 \to r(A') = 3$$

ii) Para $m_2 = 1$.

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{El determinante de una matriz} \\ \text{que posea dos filas o columnas} \\ \text{iguales es cero} \\ C_2 = C_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Si nuestro sistema toma valores distintos de $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $m_1 = \frac{1}{2} \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $m = 1 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

c) Para $m = 1$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), en consecuencia debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$AX = B \to \left\{ \begin{array}{r} \cancel{-2x + y - 3z = 1} \\ -x + y - z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{r} -x + y - z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right.$$

Nuestro sistema ya se encuentra escalonada, así que a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta$; con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y - z & = & 1 \\ x + 2z & = & 0 \\ z & = & \theta \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y - (\theta) & = & 1 \\ x + 2 \cdot (\theta) & = & 0 \\ z & = & \theta \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rcr} -x + y & = & 1 + \theta \\ x & = & -2\theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{rcr} -(-2\theta) + y & = & 1 + \theta \\ x & = & -2\theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2\theta \\ y & = & 1 - \theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. , \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (-2\theta;\ 1 - \theta;\ \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

La solución del sistema para $m = 1$ es $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2\theta \\ y & = & 1 - \theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. ,\quad$ con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (-2\theta;\ 1 - \theta;\ \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2013. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 0 \\ x-y+mz & = & m-2 \\ mx+y+3z & = & m-2 \end{array}\right.$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [0,75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $m=2$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 0 \\ x-y+mz & = & m-2 \\ mx+y+3z & = & m-2 \end{array}\right. \to (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & m-2 \\ m & 1 & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & m-2 \\ m & 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro m en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de m que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{C_2=C_2-2C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & -3 & m-1 \\ \cancel{m} & 1-2m & 3-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & m-1 \\ 1-2m & 3-m \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(3-m) - (1-2m)\cdot(m-1) = 2m^2-8$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A| = & 2m^2-8 \\ |A'| = & 0 \end{array}\right| \quad 2m^2-8=0; \quad m^2=4; \quad m=\pm\sqrt{4} \to \left\{\begin{array}{rcr} m_1 & = & -2 \\ m_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $m_1=-2$, $m_2=2$ y $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos percatamos que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -3 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall m \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $m_1 = -2$ y $m_2 = 2$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para los casos $m_1 = -2$ y $m_2 = 2$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro m toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de m aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $m_1 = -2$.
Sustituimos el valor $m = -2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

  Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{0} \\ 3 & -2 & \cancel{0} \\ \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-4} \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot [1 \cdot (-2) - 3 \cdot 2] = 32 \neq 0 \rightarrow r(A') = 3$$

ii) Para $m_2 = 2$.
Sustituimos el valor $m = 2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Este caso es más rápido que el anterior, porque todos los menores de orden 3 distintos de la matriz A contendrán una columna llena de ceros cuyo determinantes siempre valdrán cero, recuerda que por las propiedades de los determinantes sabemos que si posee una fila o columna llena de ceros su determinante vale cero. En consecuencia el $r(A') = 2$.

iii) Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $m_1 = -2$ y $m_2 = 2$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $m = -2 \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $m = 2 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $m = 2$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ \cancel{2x+y+3z=0} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ -3y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $y = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ y & = & \theta \\ -3y+z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2\cdot(\theta)+z & = & 0 \\ y & = & \theta \\ -3\cdot(\theta)+z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+z & = & -2\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right. \rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{rcr} x+(3\theta) & = & -2\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -5\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right. , \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x, y, z) = (-5\theta; \theta; 3\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

La solución del sistema para $m = 2$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -5\theta \\ y & = & \theta \\ z & = & 3\theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (-5\theta; \theta; 3\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2013. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 3 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación

$$x + my + 4z = -3$$

al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.
b) [1 punto] Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

---

a) Añadimos la nueva ecuación a nuestro sistema y transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ x + my + 4z &= -3 \end{cases} \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & m & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & m & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

El enunciado nos impone que nuestro nuevo sistema debe tener las mismas soluciones que el original, a simple vista podemos ver que las dos ecuaciones que conforman nuestro sistema inicial no son proporcionales y por lo tanto son linealmente independientes, lo que significa que la nueva ecuación debe ser combinación lineal de ellas dos, para determinar el valor de m que provoca la combinación lineal nos bastará con calcular el determinante de la matriz de coeficientes e imponerle que sea cero, porque sabemos por las propiedades de los determinantes que si existe combinación lineal en una matriz su determinante valdrá cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-2F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 5 & -3 \\ \cancel{0} & m+1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [5 \cdot 3 - (m+1) \cdot (-3)] = 3m + 18 \rightarrow \begin{array}{rl|} |A| = & 3m+18 \\ |A'| = & 0 \end{array} \; 3m + 18 = 0 \rightarrow m = -6$$

Solución:

Para $m = -6$ la nueva ecuación será combinación lineal de las ecuaciones dadas dando lugar a que ambos sistemas tengan las mismas soluciones.

b) Creamos la nueva ecuación $x+y+z=6$, que añadimos al sistema dado para obtener el nuevo sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 3 \\ x+y+z & = & 6 \end{array}\right.$$

Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 3 \\ x+y+z & = & 6 \end{array}\right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el rango de ambas matrices para ver a que tipo de sistema nos enfrentamos.
Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, y en la matriz ampliada siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, en consecuencia los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 6 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2+F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ 3 & 2 & \cancel{0} \\ 0 & 2 & \cancel{0} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow r(A) = 3.$$

- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 3 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Por lo anteriormente expuesto al ser el determinante de la matriz de coeficientes distinto de cero el rango de ambas matrices será 3.

Mediante el teorema de Rouché-Frobenius podremos clasificar el sistema en función de los rangos:

- Como $(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

Para resolverlo podemos optar principalmente por dos métodos:

i) Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan: Escalonaremos el sistema para obtener la solución.

$$\left\{\begin{aligned} x-y+z&=0\\ 2x+3y-z&=3\\ x+y+z&=6\end{aligned}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 6\end{array}\right) \xrightarrow{F_3=\frac{1}{2}F_3}$$

$$\xrightarrow{F_3=\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-5F_3]{F_1=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -3 & -12\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{3}F_2}$$

$$\xrightarrow{F_2=-\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

La solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1\\ y &=& 3\\ z &=& 4\end{array}\right., \text{pudiendo expresarse también como } (x,\ y,\ z) = (-1;\ 3;\ 4)$$

ii) Por la regla de Cramer: Mediante una división de determinantes.

Si reescribimos nuestro sistema en forma matricial $AX = B$

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Los valores de x, y y z se definen como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{6} = 3 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{6} = 4$$

Solución:

La solución del sistema es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 3 \\ z & = & 4 \end{array}\right.$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (-1; 3; 4)$.