Bloque 4: Análisis

Problemas de Optimización 2013

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

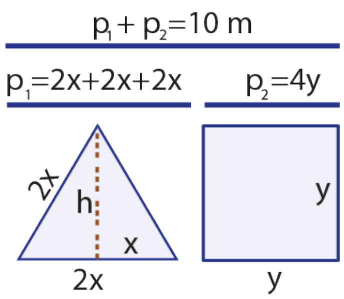
Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Realizamos un boceto para poder definir el triangulo equilátero y el cuadrado.



F. Objetivo: Suma de las áreas sea mínima, usaremos las expresiones de las áreas de un triángulo y un cuadrado.

$$S\left(x,\ y,\ h\right) = \frac{\cancel{2}x \cdot h}{\cancel{2}} + y^2 = xh + y^2$$

Establecemos h en función del lado aplicando pitágoras

$$(2x)^2 = h^2 + x^2 \to h = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$$S\left(x,\ y\right) = x \cdot \left(\sqrt{3}x\right) + y^2 = \sqrt{3}x^2 + y^2$$

Restricción: La suma del perímetro de ambas figuras debe ser 10 m.

$$\begin{gathered} 10 = p_1 + p_2 \text{ siendo} \\ p_1 = 2x + 2x + 2x = 6x \quad \text{y} \quad p_2 = 4y \\ 10 = 6x + 4y \end{gathered}$$

De la restricción despejamos la variable y y la sustituimos en la función objetivo.

$$10 = 6x + 4y;\ 10 - 6x = 4y;\ y = \frac{10 - 6x}{4} \to S\left(x\right) = \sqrt{3}x^2 + \left(\frac{10 - 6x}{4}\right)^2$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Calculamos $S'(x)$.

$$S(x) = \sqrt{3}x^2 + \left(\frac{10-6x}{4}\right)^2 = 2\sqrt{3}x^2 + \left(\frac{5-3x}{2}\right)^2$$

$$S'(x) = 2\cdot\sqrt{3}x + \cancel{2}\cdot\left(\frac{5-3x}{\cancel{2}}\right)^{2-1}\cdot\left(0-\frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{3}x - \frac{3}{2}\cdot(5-3x)$$

Imponemos la condición $S'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} S'(x) & = & 2\sqrt{3}x - \frac{3}{2}\cdot(5-3x) \\ S'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad 2\sqrt{3}x - \frac{3}{2}\cdot(5-3x) = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$2\sqrt{3}x - \frac{3}{2}\cdot(5-3x) = 0;\;\; 2\sqrt{3}x - \frac{15}{2} + \frac{9x}{2} = 0;\;\; \frac{4\sqrt{3}x}{\cancel{2}} - \frac{15}{\cancel{2}} + \frac{9x}{\cancel{2}} = 0$$

$$4\sqrt{3}x - 15 + 9x = 0;\;\; 4\sqrt{3}x + 9x = 15;\;\; \left(4\sqrt{3}+9\right)x = 15 \to x = \frac{15}{9+4\sqrt{3}} = \frac{45-20\sqrt{3}}{11}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \frac{45-20\sqrt{3}}{11}$ sea un mínimo.

$$S'(x) = 2\sqrt{3}x - \frac{3}{2}\cdot(5-3x)$$

$$S''(x) = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\cdot(0-3) = 2\sqrt{3} + \frac{9}{2}$$

$$S''\left(\frac{45-20\sqrt{3}}{11}\right) = 2\sqrt{3} + \frac{9}{2} > 0$$

Por tanto para $x = \dfrac{45 - 20\sqrt{3}}{11}$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la otra variable.

$$\text{Para } x = \frac{45-20\sqrt{3}}{11} \rightarrow y = \frac{10 - 6 \cdot \dfrac{45-20\sqrt{3}}{11}}{4} = \frac{\dfrac{110-270+120\sqrt{3}}{11}}{4} = \frac{-160+120\sqrt{3}}{44} = \frac{-40+30\sqrt{3}}{11}$$

Ahora que ya conocemos las variables x e y, las sustituimos en la expresiones de p_1 y p_2 para obtener el valor de cada uno de los trozos del alambre que nos pedían.

Para $x = \dfrac{45-20\sqrt{3}}{11}$ e $y = \dfrac{-40+30\sqrt{3}}{11}$ entonces $p_1 = 6 \cdot \dfrac{45-20\sqrt{3}}{11} = \dfrac{270-120\sqrt{3}}{11}\, m$ y
$p_2 = 4 \cdot \dfrac{-40+30\sqrt{3}}{11} = \dfrac{-160+120\sqrt{3}}{11}\, m$

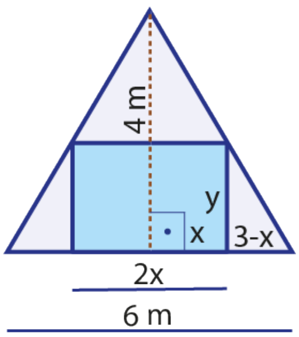
Solución:

Las dimensiones de los trozos del alambre que forman un triángulo equilátero y un cuadrado con las condiciones impuestos en el enunciado son $\dfrac{270-120\sqrt{3}}{11}\, m$ y $\dfrac{-160+120\sqrt{3}}{11}\, m$ respectivamente.

2013. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Realizamos un boceto para poder definir el rectángulo pedido, como el centro del lado desigual de nuestro triangulo isósceles coincide con la mitad de la base del rectángulo para facilitar los calculos tomaremos su base como $2x$ (Es recomendable en figuras simétricas).



F. Objetivo: Área máxima del rectángulo, para determinarla usaremos la expresión del área de un rectángulo.

$$A\left(x,\ y\right) = 2x \cdot y$$

Restricción: Formamos dos triángulos proporcionales entre si, aplicamos el teorema de Tales.

$$\frac{3-x}{3} = \frac{y}{4}$$

De la restricción despejamos la variable y y la sustituimos en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''\left(x\right)$:
  - Si $f''\left(a\right) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''\left(a\right) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$\frac{3-x}{3} = \frac{y}{4};\ y = \frac{4\cdot(3-x)}{3} \rightarrow A\left(x\right) = 2x \cdot \frac{4\cdot(3-x)}{3}$$

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = 2x \cdot \frac{4 \cdot (3-x)}{3} = \frac{8x \cdot (3-x)}{3} = \frac{8}{3} \cdot \left(3x - x^2\right)$$

$$A'(x) = \frac{8}{3} \cdot (3 - 2x)$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = & \frac{8}{3} \cdot (3-2x) \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; \frac{8}{3} \cdot (3-2x) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{3} \neq 0 \text{ no válida} \\ 3 - 2x = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$3 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \frac{3}{2}$ sea un máximo.

$$A'(x) = \frac{8}{3} \cdot (3 - 2x)$$

$$A''(x) = \frac{8}{3} \cdot (0 - 2) = -\frac{16}{3}$$

$$A''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{16}{3} < 0$$

Por lo tanto para $x = \frac{3}{2}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la altura del rectángulo.

$$\text{Para } x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{4 \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right)}{3} = \frac{4 \cdot \left(\frac{6-3}{2}\right)}{3} = \frac{6}{3} = 2\ m$$

La base de nuestro rectángulo es $2x$, en consecuencia para $x = \frac{3}{2}$ nuestra base es de $2 \cdot \frac{3}{2} = 3\ m$

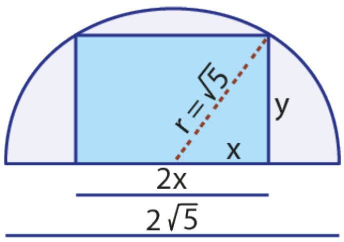
Solución:

Los valores de la base y la altura del rectángulo que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $3\ m$ y $2\ m$ respectivamente.

2013. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}\ cm$ de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

Realizamos un boceto para poder definir el rectángulo pedido, como el centro del semicírculo coincide con la mitad de la base del rectángulo para facilitarnos los cálculos tomaremos su base como $2x$ (Es recomendable en figuras simétricas).



F. Objetivo: Perímetro máxima del rectángulo, para determinarlo usaremos la expresión del perímetro de un rectángulo.

$$P\left(x,\ y\right) = 2 \cdot 2x + 2 \cdot y = 4x + 2y$$

Restricción: La hipotenusa del triangulo rectángulo que podemos formar es $\sqrt{5}\ cm$, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + y^2$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''\left(x\right)$:
  - Si $f''\left(a\right) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''\left(a\right) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

De la restricción despejamos la variable y y la sustituimos en la función objetivo.

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + y^2;\ y = \sqrt{5 - x^2} \rightarrow P\left(x\right) = 4x + 2 \cdot \sqrt{5 - x^2}$$

Calculamos $P'(x)$.

$$P(x) = 4x + 2 \cdot \sqrt{5 - x^2}$$

$$P'(x) = 4 + 2 \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{5 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Imponemos la condición $P'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} P'(x) & = & 4 - \dfrac{2x}{\sqrt{5-x^2}} \\ P'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0; \;\; 4 = \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}; \;\; 4 \cdot \left(\sqrt{5 - x^2}\right) = 2x; \;\; \left[4\left(\sqrt{5 - x^2}\right)\right]^2 = (2x)^2$$

$$16 \cdot \left(5 - x^2\right) = 4x^2; \;\; 80 - 20x^2 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{80}{20}} = \pm 2 \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = \;\;\, 2 \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $x_1 = -2$ al ser negativa, las dimensiones de los lados de un rectángulo no pueden tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = 2$ sea un máximo.

$$P'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}$$

$$P''(x) = 0 - \frac{2 \cdot \sqrt{5 - x^2} - \cancel{2}x \cdot \dfrac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{5 - x^2}} \cdot (0 - 2x)}{\left(\sqrt{5 - x^2}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5 - x^2} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}}{5 - x^2} =$$

$$= -\frac{2\left(\sqrt{5 - x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{5 - x^2}\right) + 2x^2}{(5 - x^2) \cdot \sqrt{5 - x^2}} = -\frac{2 \cdot \left(5 - x^2\right) + 2x^2}{(5 - x^2) \cdot \sqrt{5 - x^2}} = -\frac{10}{(5 - x^2) \cdot \sqrt{5 - x^2}}$$

$$P''(2) = -\frac{10}{(5 - 2^2) \cdot \sqrt{5 - 2^2}} = -10 < 0$$

Por lo tanto para $x = 2$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la altura de nuestro rectángulo.

Para $x = 2 \rightarrow y = \sqrt{5 - (2)^2} = 1\ cm$

La base de nuestro rectángulo es $2x$, en consecuencia para $x = 2$ nuestra base es de $2 \cdot 2 = 4\ cm$.

Solución:

Los valores de la base y la altura del rectángulo que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $4\ cm$ y $1\ cm$ respectivamente.