Bloque 4: Análisis

Funciones con Parámetros 2013

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x \neq n$.

a) [1,75 puntos] Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de g.

b) [0,75 puntos] Determina si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.

---

a) Planteamos las condiciones para obtener los valores de los parámetros pedidos:

Si la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, entonces sabemos que $m = 2$ y $n = -4$, por lo tanto tenemos dos condiciones.

> Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f(x)$ si:
>
> - $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, siendo $m \neq 0, \pm\infty$
> - $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$

$$2 = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} \tag{1}$$

$$-4 = \lim_{x\to\infty} (g(x) - 2x) \tag{2}$$

De la primera condición (1) podemos obtener el valor m.

$$2 = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{mx^3}{(x-n)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x\cdot(x-n)^2} = \left[\begin{array}{c} \text{Desarrollamos la igualdad notable} \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\ (x-n)^2 = x^2 + n^2 - 2nx \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x\cdot(x^2+n^2-2nx)} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{x^3 - 2nx^2 + n^2x} = \frac{\infty}{\infty}\,\text{IND} \xrightarrow[gn=gd]{R.G} \frac{m}{1} = m$$

Como el valor de dicho límite debe ser 2, lo igualamos a nuestro resultado para obtener el valor de m.

$$m = 2$$

Para $m = 2$ tenemos que $g(x) = \dfrac{2x^3}{(x-n)^2}$, aplicando la condición (2) obtendremos la última de las constantes que necesitamos:

$$-4 = \lim_{x\to\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3}{(x-n)^2} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2x \cdot \left[(x-n)^2 \right]}{x^2 + n^2 - 2nx} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2x \cdot (x^2 + n^2 - 2nx)}{x^2 + n^2 - 2nx} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 2xn^2 + 4nx^2}{x^2 + n^2 - 2nx} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4nx^2 - 2xn^2}{x^2 + n^2 - 2nx} = \frac{\infty}{\infty}\text{IND} \xrightarrow[gn=gd]{R.G} \frac{4n}{1} = 4n$$

Igualamos el valor obtenido del límite al dado en el enunciado y resolvemos la ecuación para obtener el ultimo de los valores pedidos.

$$4n = -4 \to n = -1$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $m = 2$ y $n = -1$.

b) Para que sea simétrica respecto al origen la función dada debe ser una función impar, así que solamente debemos de comprobar si verifica

$$g(x) = -g(-x)$$

Para $m = 2$ y $n = -1$, calculamos $g(-x)$ y posteriormente $-g(-x)$:

Una función f puede ser simétrica respecto:

- Al eje de ordenadas, si se trata de una función par, siempre que verifique $f(x) = f(-x)$.
- Al origen, si se trata de una función impar, siempre que verifique $f(x) = -f(-x)$

$$g(x) = \frac{2x^3}{(x+1)^2}$$

$$g(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x+1)^2} = \frac{-2x^3}{(-x+1)^2}$$

$$-g(-x) = -\frac{-2x^3}{(-x+1)^2} = \frac{2x^3}{(-x+1)^2}$$

Entonces $g\left(x\right)=\dfrac{-2x^3}{\left(-x+1\right)^2}\neq\dfrac{2x^3}{\left(-x+1\right)^2}=-g\left(-x\right)$

Solución:

Como $g\left(x\right)=\dfrac{mx^3}{\left(x-n\right)^2}\neq\dfrac{mx^3}{\left(x+n\right)^2}=-g\left(-x\right)$ no es una función impar y por lo tanto no presenta simetría respecto al origen de coordenadas.

2013. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcula a, b y c.

Para poder determinarla necesitamos obtener el valor de las constantes a, b y c, así que debemos plantear 3 condiciones:

Si tiene un punto de inflexión en $x = 1$ provoca que la segunda derivada sea nula.

$$f''(1) = 0 \qquad (1)$$

Si f tiene en $(a,\ b)$ un extremo relativo, sabemos que se trata de una condición doble:

- $f(a) = b$, porque para $x = a$ le corresponde el valor $y = b$.
- $f'(a) = 0$, puesto que la derivada de f en dicho punto anula la derivada.

Si f tiene en $x = a$ un punto de inflexión, sabemos que $f''(a) = 0$.

Si tiene un extremo relativo en $x = 2$ y de valor -9, entonces sabemos que la gráfica de f pasa por el punto $(2,\ -9)$ y además para $x = 2$ provoca que la derivada sea nula.

$$f(2) = -9 \qquad (2)$$

$$f'(2) = 0 \qquad (3)$$

A continuación aplicamos las tres condiciones para determinar los valores de a, b y c, pero antes de ello obtendremos la primera y segunda derivada .

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

De condición (1) podemos obtener el valor a.

$$\left.\begin{array}{rc} f''(x) = & 6x+2a \\ f''(1) = & 6\cdot 1+2a \\ f''(1) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 6\cdot 1+2a=0 \\ 6+2a=0 \\ a=-3 \end{array}$$

Para $a=-3$ tenemos que $f'(x)=3x^2-6x+b$, aplicando la condición (3), obtendremos b.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x) = & 3x^2-6x+b \\ f'(2) = & 3\cdot(2)^2-6\cdot 2+b \\ f'(2) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 3\cdot(2)^2-6\cdot 2+b=0 \\ 0+b=0 \\ b=0 \end{array}$$

Para $a=-3$ y $b=0$ tenemos que $f(x)=x^3-3x^2+c$, imponiendole la condición (2) que nos falta calculamos el último de los parámetros.

$$\left.\begin{array}{rc} f(x) = & x^3-3x^2+c \\ f(2) = & 2^3-3\cdot(2)^2+c \\ f(2) = & -9 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 2^3-3\cdot(2)^2+c=-9 \\ -4+c=-9 \\ c=-5 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a=-3$, $b=0$ y $c=-5$.

2013. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq \dfrac{1}{2}$.

a) [1 punto] Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0, 2)$ y que la recta $x = 2$ es una asíntota de dicha gráfica.

b) [1,5 puntos] Para $k = 4$ y $a = 2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

---

a) Para poder determinar el valor de las constantes a y k, debemos plantear 2 condiciones:

Si la recta $x = -1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f, entonces para $x = 2$ el denominador debe valer cero.

$$(2-a)(2\cdot 2-1) = 0 \qquad (1)$$

> Si f tiene una asíntota vertical en $x = k$ sabemos que el denominador se debe anular para dichos valores de k.
>
> Si f para por el punto (a, b), quiere decir que $f(a) = b$.

Si la gráfica de f pasa por el punto $(0, 2)$, sabemos que para $x = 0$ la imagen de la función toma el valor 2.

$$f(0) = 2 \qquad (2)$$

De la primera condición (1) podemos obtener el valor a.

$$(2-a)(2\cdot 2-1) = 0;\ 3\cdot(2-a) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 2-a = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Para $a = 2$ tenemos que $f(x) = \dfrac{k}{(x-2)(2x-1)}$, aplicando la condición (2) determinamos k.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{k}{(x-2)(2x-1)} \\ f(0) &= \frac{k}{(0-2)(2\cdot 0-1)} \\ f(0) &= 2 \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{aligned} \frac{k}{(0-2)(2\cdot 0-1)} &= 2 \\ \frac{k}{2} &= 2 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

> **Solución:**
>
> La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a = 2$ y $k = 4$.

b) Para $k = 4$ y $a = 2$ nuestra función es

$$f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)} \text{ para } x \neq 2 \text{ y } x \neq \frac{1}{2}$$

Calculamos $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{2x^2 - x - 4x + 2} =$$
$$= \frac{4}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cancel{\left[2x^2 - 5x + 2\right]} - 4 \cdot (4x - 5)}{2x^2 - 5x + 2} =$$
$$= \frac{-16x + 20}{2x^2 - 5x + 2}$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Para poder determinarlos aplicaremos el criterio de la primera derivada para ello estudiaremos el signo de $f'(x)$.

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $[a, b]$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{-16x + 20}{2x^2 - 5x + 2} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -16x + 20 = 0 \\ x = \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4} \end{array}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente, $x = \frac{5}{4}$ y los problemas del dominio:

Intervalos	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{5}{4}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece	$\searrow$ Decrece

$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos antes los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = \frac{5}{4}$ pasamos de crecer a decrecer por tanto tenemos un máximo relativo, ahora necesitamos su coordenada en el eje de ordenadas (Eje Y), para ellos calcularemos la imagen de dicho punto sustituyéndolo en $f\left(x\right)$.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{\left[\left(\frac{5}{4}\right) - 2\right] \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) - 1\right]} = \frac{4}{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{4}{\frac{9}{8}} = \left[\begin{array}{c} \text{Recuerda que:} \\ \frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b} \\ -\frac{4}{\frac{9}{8}} = -4 \div \frac{9}{8} = -\frac{4 \cdot 8}{9} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{4 \cdot 8}{9} = -\frac{39}{2} \rightarrow \text{máximo relativo en } \left(\frac{5}{4}, -\frac{39}{2}\right)$$

Solución:

$f\left(x\right)$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$f\left(x\right)$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$f\left(x\right)$ tiene un máximo relativo en $\left(\frac{5}{4}, -\frac{39}{2}\right)$.

2013. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x = 1$.

Si la ecuación de la recta normal en $x = a$ es $y = mx + n$, sabemos que se trata de una condición doble.

- $f'(a) = -\frac{1}{m}$, la recta normal es perpendicular a la recta tangente, por tanto el producto de sus pendientes da -1.
- $f(a) = m \cdot (a) + n$, en $x = a$ la gráfica f y su recta tangente tienen el mismo punto en común.

Si f tiene en $x = a$ un punto de inflexión, sabemos que $f''(a) = 0$.

Para poder determinarla necesitamos obtener el valor de las constantes a, b y c, así que debemos de plantear 3 condiciones:

Si tiene un punto de inflexión en $x = 1$ provoca que la segunda derivada sea nula.

$$f''(1) = 0 \tag{1}$$

Si la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $x + y = -3 \rightarrow y = -3 - x$, entonces para $x = 1$ la derivada de la función será la inversa y opuesta a la pendiente de la recta nromal, porque la recta normal y tangente son perpendiculares entre sí cumpliendo $m_{tg} \cdot m_n = -1 \rightarrow m_{tg} = \frac{-1}{m_n}$ y además para dicho valor de x la función y su recta normal tendrán el mismo punto en común.

$$f'(0) = \frac{-1}{-1} = 1 \tag{2}$$

$$f(0) = -3 - (0) = -3 \tag{3}$$

A continuación aplicamos las tres condiciones para determinar los valores de a, b y c, pero antes de ello obtendremos la primera y segunda derivada .

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

Aplicando la condición (1) obtenemos el valor a.

$$\left.\begin{array}{rc} f''(x) = & 6x+2a \\ f''(1) = & 6\cdot 1+2a \\ f''(1) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 6\cdot 1+2a=0 \\ 6+2a=0 \\ a=-3 \end{array}$$

Para $a=-3$ tenemos que $f'(x)=3x^2-6x+b$, aplicando la condición (2), determinamos b.

$$\left.\begin{array}{rc} f'(x) = & 3x^2-6x+b \\ f'(0) = & 3\cdot(0)^2-6\cdot 0+b \\ f'(0) = & 1 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 3\cdot(0)^2-6\cdot 0+b=1 \\ 0+b=1 \\ b=1 \end{array}$$

Para $a=-3$ y $b=1$ tenemos que $f(x)=x^3-3x^2+x+c$, imponiendole la condición (3) que nos falta calculamos el último de los parámetros.

$$\left.\begin{array}{rc} f(x) = & x^3-3x^2+x+c \\ f(0) = & 0^3-3\cdot(0)^2+0+c \\ f(0) = & -3 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{r} 0^3-3\cdot(0)^2+0+c=-3 \\ 0+c=-3 \\ c=-3 \end{array}$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a=-3$, $b=1$ y $c=-3$.