Bloque 4: Ánalisis

Continuidad y Derivabilidad 2013

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea $f:(-\infty,\ 1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

La gráfica de f solo presenta un único punto conflictivo en $x = 0$, al tratarse de un punto donde pasamos de una función a otra. Excluyendo el resto de valores porque cada uno de los trozos de la función es continua y derivable en su dominio.

Al indicarnos el enunciado que la función es derivable, es condición indispensable que también sea continua en dicho punto, empezamos estudiando su continuidad.

Estudiamos continuidad en $x=0$:

$f(0)=0+2e^{-0}=0+2\cdot 1=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2e^{-x})=f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}a\sqrt{b-x}=a\sqrt{b-0}=a\sqrt{b}$

> Una función f es derivable en $x=a$ si verifica:
>
> - Es continua en $x=a$, que se verificará si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
>   - Existe $f(a)$, existirá siempre que a pertenezca al dominio de f.
>   - Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, para ello los limites laterales deben de coincidir, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b\to\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.
>   - El límite sea igual al valor de la función, $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
> - Las derivadas laterales coinciden, $f'(a^-)=f'(a^+)$.
>
> Por tanto si una función es derivable en $x=a$ también es continua, pero si una función es continua puede que sea derivable.

Para que sea continua debe existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y solo es posible si los límites laterales coinciden, igualándolos obtendremos una relación entre las variables.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2=a\sqrt{b}=\lim_{x\to 0^+} f(x)\to a\sqrt{b}=2$$

Para $a\sqrt{b}=2$, se verifica que $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=2$ y por lo tanto la gráfica de f es continua en $x=0$, procedemos a estudiar su derivabilidad calculando previamente su derivada.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ podemos resolverlas aplicando de forma directa la regla de L´Hôpital, la cual nos dice que dicho límite es igual al limite obtenido de derivar numerador y denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0\\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2e^{-x}\cdot(-1) & \text{si} \quad x\le 0\\ a\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{b-x}}\cdot(-1) & \text{si} \quad 0<x<1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0\\ -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0<x<1\end{cases}$$

Estudiamos derivabilidad en $x=0$:

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(1-2e^{-x})=1-2e^0=1-2\cdot 1=-1$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}-\frac{a}{2\sqrt{b-x}}=-\frac{a}{2\sqrt{b-0}}=-\frac{a}{2\sqrt{b}}$$

Para que sea derivable los limites laterales deben de coincidir, igualamos ambos límites, obteniendo otra relación entre ambas variables.

$$f'(0^-)=f'(0^+)$$

$$-1=-\frac{a}{2\sqrt{b}}\to a=2\sqrt{b}$$

Ahora solo tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por $a\sqrt{b}=2$ y $a=2\sqrt{b}$.

$$\begin{cases} a\sqrt{b} &= 2\\ a &= 2\sqrt{b}\end{cases}\to\begin{cases} 2\sqrt{b}\cdot\sqrt{b} &= 2\\ a &= 2\sqrt{b}\end{cases}\to\begin{cases} 2\cdot b &= 2\\ a &= 2\sqrt{b}\end{cases}\to\begin{cases} b &= 1\\ a &= 2\sqrt{b}\end{cases}\to$$
$$\begin{cases} b &= 1\\ a &= 2\sqrt{1}\end{cases}\to\begin{cases} b &= 1\\ a &= 2\end{cases}$$

Solución:

La gráfica de f será derivable en todo su dominio para $a=2$ y $b=1$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \tag{1}$$

Al tratarse de una función a trozos seleccionaremos aquella que tome el valor $x = 0$, que en nuestro caso será $f(x) = x + 2e^{-x}$, todos los valores los tenemos calculados gracias al apartado a) así que solo debemos de sustituirlos en la ecuación de la recta tangente (1).

$f(0) = 2$

$f'(0) = -1$

$y - 2 = -1 \cdot (x - 0)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - 2 = -1 \cdot (x - 0) \rightarrow y = -x + 2$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 0$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \tag{2}$$

Como paso anteriormente disponemos de todos los valores ya calculados, solo debemos de sustituirlos en su expresión correspondiente (2).

$f(0) = 2$

$f'(0) = -1$

$y - 2 = -\frac{1}{-1} \cdot (x - 0)$ expresada en forma punto-pendiente.

Aunque a continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - 2 = -\frac{1}{-1} \cdot (x - 0) \rightarrow y = x + 2$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$ es $y = -x + 2$.
La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = 0$ es $y = x + 2$.