Bloque 4: Ánalisis

Asíntotas,

Puntos Críticos,

Monotonía y Curvatura 2013

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2013. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea $f:(0,\ +\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{2ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) [1,75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) [0,75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

---

a) Para estudiar la monotonía y los extremos relativos calculamos $f'(x)$:

$$f(x)=f(x)=\frac{2ln(x)}{x^2}=2\cdot\frac{ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}}-ln(x)\cdot 2x}{(x^2)^2}=$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{x-2x\cdot ln(x)}{x^4}=2\cdot\frac{\cancel{x}\cdot(1-2ln(x))}{x^{\cancel{4}3}}$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{1-2ln(x)}{x^3}$$

Imponemos la condición $f'(x)=0$, para determinar los puntos críticos:

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable $(a,\ b)$ podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x)>0$ para toda $x\in(a,\ b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo $(a,\ b)$.
- Si $f'(x)<0$ para toda $x\in(a,\ b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo $(a,\ b)$.

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2\cdot\dfrac{1-2ln(x)}{x^3} \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right|\ 2\cdot\frac{1-2ln(x)}{x^3}=0\rightarrow\left\{\begin{array}{c} 2\neq 0 \\ \dfrac{1-2ln(x)}{x^3}=0 \end{array}\right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{1-2ln(x)}{x^3}=0;\ \ 1-2ln(x)=0;\ \ ln(x)=\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{de logaritmo}]{\text{Aplicamos la definición}}$$

como $log_b a=c\longleftrightarrow a=b^c$ entonces $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\cong 1,65$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando el punto crítico obtenido anteriormente $x = \sqrt{e}$ y sus extremos serán los valores entre los que se encuentra definida, es decir entre 0 y $+\infty$

Intervalos	$(0, \sqrt{e})$	$(\sqrt{e}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = \sqrt{e}$ pasamos de crecer a decrecer por tanto tenemos un máximo relativo. Ahora calculamos la imagen para los valores de x para obtener sus valores en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolos en $f(x)$.

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{2}{e} \rightarrow \text{Máximo relativo en el punto } A\left(\sqrt{e}, \frac{2}{e}\right)$$

Solución:

$f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, \sqrt{e})$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $(\sqrt{e}, +\infty)$.
$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
$f(x)$tiene un máximo relativo en $A\left(\sqrt{e}, \frac{2}{e}\right)$

b) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: Los posibles valores donde pueden presentar este tipo de asíntotas son los problemas en el dominio en este caso $x = 0$, pero como el ejercicio nos indica que $x > 0$ solo estudiaremos cuando $x \rightarrow 0^+$.

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

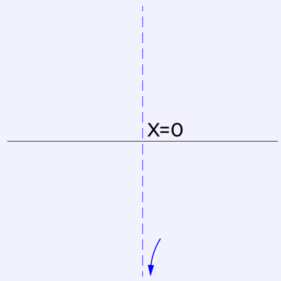
Para $x = 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2ln\,(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} 2 \cdot ln\,(x) \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= 2 \cdot ln\,(0^+) \cdot \frac{1}{(0^+)^2} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

Tiene AV en $x = 0$

Posición de la gráfica respecto a la AV



AH: La función solo se encuentra definida para $x > 0$ estudiaremos unicamente su comportamiento para $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2ln\,(x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{ln\,(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}\ IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \cancel{2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\cancel{2}x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

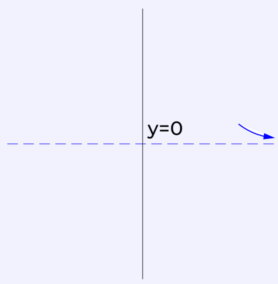
La gráfica de f posee asíntota horizontal por la rama derecha, al obtener 0^+ cuando x tiende a $+\infty$, sabemos que por la rama derecha la gráfica de f se aproxima por encima de la asíntota horizontal, al presentar asíntota horizontal en su única rama posible no es posible que posea asíntota oblicua.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to -\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x\to +\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.

Posición de la gráfica respecto a la AV



AO: No tiene al presentar $A.H.$

Solución:

La recta $x = 0$ es asíntota vertical a la gráfica de f.
La recta $y = 0$ es asíntota horizontal a la gráfica de f por la rama derecha.

2013. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{ln(x)}$ para $x > 0$, $x \neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1,25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisas $x = e$.

Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: Los posibles valores donde pueden presentar este tipo de asíntotas son los problemas en el dominio en este caso $x = 0$ y $x = 1$, pero como el ejercicio nos indica que $x > 0$ solo estudiaremos cuando $x \to 0^+$.

Para $x = 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{ln(x)} = 0 \cdot \frac{1}{ln(0^+)} =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

No tiene AV en $x = 0$

Para $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{ln(x)} = \frac{1}{ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{ln(x)} = \frac{1}{ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

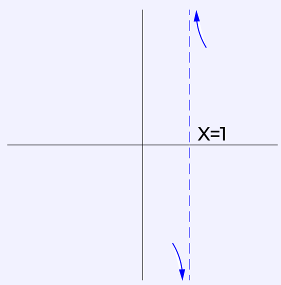
Si tiene AV en $x = 1$

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

Posición de la gráfica respecto a la AV



AH: La función solo se encuentra definida para $x > 0$ estudiaremos unicamente su comportamiento para $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{ln\,(x)} = \frac{+\infty}{ln\,(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty}\; IND \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

No tiene AH por la rama derecha.

La gráfica de f no posee asíntota horizontal, procedemos a estudiar su posible asíntota oblicua.

AO: Tiene la forma $y = mx + n$, al igual que la $A.H.$ como se encuentra definida exclusivamente para $x > 0$ solo es necesario estudiarla para $+\infty$

i) Calculamos m:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f\,(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{ln\,(x)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot ln\,(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ln\,(x)} = \frac{1}{ln\,(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Como m no pude tomar el valor de cero, no presenta $A.O.$

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x\to-\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x\to+\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.

En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f\,(x)$si:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f\,(x)}{x}$, siendo $m \neq 0, \pm\infty$
- $n = \lim_{x\to\infty} (f\,(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$

Si una f posee una AH entonces no tiene una AO, pero si no tiene AH puede tener AO.
En funciones racionales, irracionales y en funciones a trozos debemos hacer por separado los límites para $\pm\infty$ porque podemos obtener resultados distintos.

Solución:

La recta $x = 1$ es asíntota vertical a la gráfica de f.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = e$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e) \tag{1}$$

Mientras que la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = e$ es de la forma:

$$y - f(e) = -\frac{1}{f'(e)} \cdot (x - e) \tag{2}$$

Para poder obtenerlas calcularemos $f(e)$, $f'(x)$ y posteriormente $f'(e)$.

$$f(x) = \frac{x}{ln(x)}$$

$$f(e) = \frac{e}{ln(e)} = \frac{e}{1} = e$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot ln(x) - \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{[ln(x)]^2} = \frac{ln(x) - 1}{[ln(x)]^2}$$

$$f'(e) = \frac{ln(e) - 1}{[ln(e)]^2} = \left[\text{ Como } ln(e) = 1 \right] = \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Sustituimos los valores en las expresiones de la recta tangente (1) y en la recta normal (2) para obtenerlas.

Su recta tangentes es $y - e = 0 \cdot (x - e) \to y = e$ expresada en forma explícita.

Su recta normal es $y - e = -\frac{1}{0} \cdot (x - e)$; $y - e = -\frac{(x-e)}{0}$; $0 \cdot (y - e) = -x + e \to x = e$ expresada en forma explícita.

Este apartado se puede resolver rápidamente si nos damos cuenta de que la recta tangente y normal en un punto $P(a, b)$ donde la pendiente de su recta tangente es cero, $f'(a) = 0$, son de la forma $y = b$ y $x = a$, porque al ser cero la derivada en un punto nos indica de que su recta tangente en dicho punto es una recta horizontal y como la recta normal es la perpendicular a la tangente entonces la recta perpendicular a una horizontal es una recta vertical.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = e$ es $y = e$.
La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = e$ es $x = e$.

2013. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 1.

Sea f la función definida por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1$, $x \neq 0$.

a) [1 punto] Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

b) [1,5 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

---

a) Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x \to 0^-} x\right] e^{\left[\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}\right]}$$

Resolvemos por separado cada uno de los límites.

$$\lim_{x \to 0^-} x = 0^-$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Ahora que ya tenemos cada uno de los límites resueltos los sustituimos en la primera de las expresiones para obtenre el resultado.

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = \left[0^-\right] e^{-\infty} = \left[\text{ Como } e^{-\infty} = 0 \right] =$$

$$= 0^- \cdot 0 = 0$$

A continuación repetimos el mismo proceso para el límite que nos queda.

Aplicando las siguientes propiedades de los límites podemos simplificar bastante el ejercicio:

- Propiedad del producto: $\lim\limits_{x \to k} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to k} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to k} g(x)$.
- Propiedad de la función exponencial: $\lim\limits_{x \to k} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x \to k} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to k} g(x)}$

Al trabajar con $\pm\infty$ y el número e debemos tener en cuenta:

- Si $x \to +\infty$ entonces e^x es $e^{+\infty} = +\infty$.
- Si $x \to +\infty$ entonces $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ es $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
- Si $x \to -\infty$ entonces e^x es $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
- Si $x \to -\infty$ entonces e^{-x} es $e^{-(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$.

La indeterminación $0\cdot\infty$ se resuelven convirtiéndolas en la indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ aplicando la siguiente expresión:

$$\lim_{x\to k}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0\cdot\infty\ IND\to\lim_{x\to k}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=\left[\lim_{x\to 0^+} x\right]e^{\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right]}$$

Resolvemos por separado cada uno de los límites.

$$\lim_{x\to 0^+} x=0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Por lo tanto.

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=0^+\cdot e^{+\infty}=\left[\begin{array}{c}\text{Como}\\ e^{+\infty}=+\infty\end{array}\right]=0\cdot(+\infty)\ IND$$

Reescribimos el límite para convertir la indeterminación $0\cdot(+\infty)$ en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{+\infty}{+\infty}\ IND\xrightarrow{L'H}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{\frac{-1}{x^2}}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$$

Solución:

Los límites pedidos son $\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}=0$ y $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

b) Una función puede tener asíntota vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO).

AV: En funciones de cociente de polinomios (el número e se encuentra elevado a una división de polinomios) sabemos que las asíntotas verticales corresponden a los valores que anulan el denominador y no anulan al numerado. En este caso ocurre para $x = 0$.

Una recta $x = k$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to k^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to k^+} f = \pm\infty$$

Siendo k las raíces reales del denominador que no lo sean del numerador.

Estudiamos los límites laterales para conocer la posición de la gráfica de f respecto a su asíntota vertical, ya calculados en el apartado anterior.

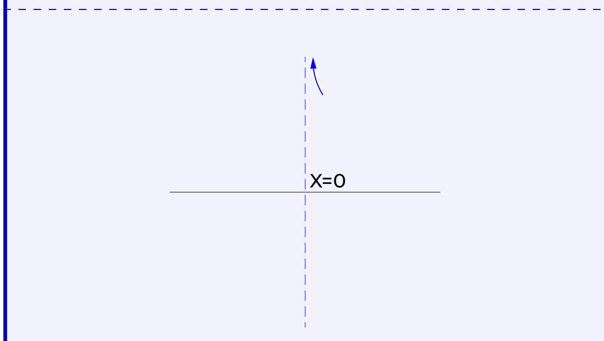
Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Tiene AV en $x = 0$

Posición de la gráfica respecto a la AV



AH: La función solo se encuentra definida para $x \geq -1$ estudiaremos unicamente su comportamiento para $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} =$$

$$= +\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

No tiene AH por la rama derecha.

La gráfica de f no posee asíntota horizontal, procedemos a estudiar su posible asíntota oblícua.

Una recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to -\infty} f = k \quad o \quad \lim_{x \to +\infty} f = k$$

Si al realizar los límites obtenemos un ∞ decimos que la gráfica no posee asíntota horizontal.
En funciones racionales de polinomios si el grado del numerador es mayor al grado denominador no tendrá Asíntota Horizontal.

AO: Tiene la forma $y = mx + n$, al igual que la $A.H.$ como se encuentra definida exclusivamente para $x \geq -1$ solo es necesario estudiarla para $+\infty$

i) Calculamos m:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

ii) Como $m = 1$, procedemos a calcular n:

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = +\infty \cdot \left(e^{\frac{1}{+\infty}} - 1\right) =$$

$$= +\infty \cdot \left(e^0 - 1\right) = +\infty \cdot (1-1) = +\infty \cdot 0 \; IND \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Las indeterminacions } 0\cdot\infty \text{ se resuelven} \\ \text{convirtiendolas en } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x\to k} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty IND \rightarrow \lim_{x\to k} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{+\infty}} - 1}{\frac{1}{+\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} IND \xrightarrow{L'H}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{-1}{x^2}}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

La asíntota oblicua de la gráfica de f tiene la forma $y = x + 1$.

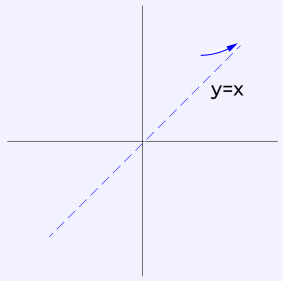
Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de una función $y = f(x)$si:

- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, siendo $m \neq 0, \pm\infty$
- $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$, siendo $n \in \mathbb{R}$

Si una f posee una AH entonces no tiene una AO, pero si no tiene AH puede tener AO.
En funciones racionales, irracionales y en funciones a trozos debemos hacer por separado los límites para $\pm\infty$porque podemos obtener resultados distintos.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua. Para ello haremos los límites cuando x tiende a $+\infty$ (recuerda que se encuentra definida solo para $x \geq -1$) de la gráfica de f menos la $A.O.$

Posición de la gráfica respecto a la AO



$$\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-(x+1)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x-1\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aplicamos la siguiente propiedad de}\\ \text{los límites para facilitarnos el calculo}\\ \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)-\lim_{x\to+\infty}(-1)=1^{+}-1=0^{+}$$

Al obtener 0^{+} cuando x tiende a $+\infty$, sabemos que por la rama derecha la gráfica de f se aproxima por encima respecto de la asíntota oblicua.

Solución:

Las rectas $x=0$ son asíntotas verticales a la gráfica de f.
La recta $y=x+1$ es la asíntota oblicua a la gráfica de f.