Bloque 1: Matrices y Determinantes

Rango 2011

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) [1,75 puntos] Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.
b) [0,75 puntos] Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

---

a) A es una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, por lo tanto sabemos que su rango siempre irá comprendido entre

$$1 \leq r(A) \leq min\{filas,\ columnas\}$$

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

El rango nos indica el número de filas o columnas que son independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas, al imponerle dicha condición descubriremos los valores de α para los cuales existe combinación lineal.

Calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot \alpha \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) \cdot \alpha - 1 \cdot 1 \cdot \alpha =$$

$$= \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

Imponemos la condición $|A| = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} |A| & = & \alpha^3 - 3\alpha + 2 \\ |A| & = & 0 \end{array}\right| \quad \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \quad \text{resolvemos por Ruffini}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\rightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 2)$$

Como $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$ entonces $(\alpha - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 2) = 0$

$$\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -2$$
$$\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1$$
$$\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1$$

A continuación estudiaremos el rango de la matriz A, para los casos: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

i) Para $\alpha_1 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de α el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

ii) Para $\alpha_2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de α el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Todos los determinantes de los menores de orden 2 que podemos formar valen cero, por lo tanto podemos afirmar que $r(A) = 1$, si te fijas con atención descubrirás que las dos primeras filas son iguales y que si multiplicas la primera por -1 obtienes la 3.

iii)Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ el $|A| \neq 0$, puesto que los únicos valores que lo hacían cero eran $\alpha = -2$ y $\alpha = 1$, así que siempre tenderemos un menor de orden 3 cuyo determinante será distinto de cero y en consecuencia el $r(A) = 3$.

Solución:

Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ el $r(A) = 3$.
Para $\alpha = -2$ el $r(A) = 2$.
Para $\alpha = 1$ el $r(A) = 1$.

b) Para $\alpha = 2$ la matriz A será de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1} y posteriormente $A^{-1} \cdot B$.

La matriz A posee inversa porque $|A| \neq 0$ para $\alpha = 2$, debido a que solo es posible que valga cero para $\alpha = -2$ y 1, calculamos su inversa mediante la siguiente expresión:

> $|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso α, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$\lvert A\rvert = \alpha^3 - 3\alpha + 2$ para $\alpha = 2$	$\lvert A\rvert = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = A^{-1}_{3x3} \cdot B_{3x1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3x1} =$$

$$X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1}$

2011. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1,75 puntos] Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.
b) [0,75 puntos] Razona para qué valores de t el sistema homogéneo $AX = O$ tiene más de una solución.

---

a) A es una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, por lo tanto sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre

El rango nos indica el número de filas o columnas que son independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas, al imponerle dicha condición descubriremos los valores de t para los cuales existe combinación lineal.

$$1 \leq r(A) \leq min\{filas,\ columnas\}$$

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Calculamos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2-C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & t-1 & t-1 \\ \cancel{-2t-1} & 2t+1 & t+3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} t-1 & t-1 \\ 2t+1 & t+3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(t-1)\cdot(t+3) - (2t+1)\cdot(t-1)] = (t-1)\cdot[(t+3)-(2t+1)] = (t-1)\cdot(-t+2)$$

Imponemos la condición $|A| = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} |A| & = & (t-1)\cdot(-t+2) \\ |A| & = & 0 \end{array}\right| \quad (t-1)\cdot(-t+2) = 0 \ \left\{ \begin{array}{l} t-1=0 \rightarrow t_1 = 1 \\ -t+2=0 \rightarrow t_2 = 2 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de la matriz A, para los casos: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{1,\ 2\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Para los casos $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1 \leq r(A) \leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A, del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, así que para estos casos solo buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

i) Para $t_1 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; 1 \leq r(A) \leq 2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 8 \neq 0 \to r(A) = 2$$

ii) Para $t_2 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \; 1 \leq r(A) \leq 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 1 \neq 0 \to r(A) = 2$$

iii)Para $t \in \mathbb{R} \setminus \{1,\, 2\}$ el $|A| \neq 0$, puesto que los únicos valores que lo hacia cero eran $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$, así que siempre tenderemos un menor de orden 3 cuyo determinante será distinto de cero, en consecuencia $r(A) = 3$.

Solución:

Para $t = 1$ y $t = 2$ el $r(A) = 2$.
Para $t \in \mathbb{R} \setminus \{1,\, 2\}$ el $r(A) = 3$.

b) Como expusimos anteriormente el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(A) \leq min\{filas,\, columnas\}$, por el apartado anterior sabemos que para los casos en los que $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual conocemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un sistema de la forma $AX = 0$, lo reconocemos porque todos sus términos independientes son nulos, se caracterizan por ser siempre Sistemas Compatibles, encontrándonos con dos posibilidades:

- Si es Sistema Compatible Determinado, solo existe la solución trivial

$$(x,\, y,\, z) = (0,\, 0,\, 0)$$

- Si es Sistema Compatible Indeterminado puede tener al menos una solución no trivial.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', además contiene una columna llena de ceros, debido a ello el determinante de todos los menores de orden 3 que formemos distintos a la matriz A contendrá dicha columna y por las propiedades de los determinantes sabemos que si un determinante contienen una fila o columna llena de ceros vale cero, llegando a la conclusión que $r(A) = r(A')$.

Para que nuestro sistema tenga soluciones distintas a la solución trivial necesitamos que sea un Sistema Compatible Indeterminado, que solo será posible cuando $r(A) = r(A') <$ nº de incógnitas $= 3$, que por lo anteriormente expuesto solo será posible para los casos $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$.

Solución:

Para que tenga alguna solución distinta a la solución nula o trivial nuestro sistema debe ser un Sistema Compatible Indeterminado que solo es posible para $t = 1$ y $t = 2$.