Bloque 1: Matrices y Determinantes

Matriz

N-esima 2011

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 puntos] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) [1,25 puntos] Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) [0,75 puntos] Calcula razonadamente A^{100}.

---

a) Para demostrar la igualdad dada necesitaremos calcular previamente A^2 y posteriormente A^3.

$$A^2_{3x3} = A_{3x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 0\cdot 3 + 3\cdot(-4) + 4\cdot 3 & 0\cdot 4 + 3\cdot(-5) + 4\cdot 4 \\ 1\cdot 0 + (-4)\cdot 1 + (-5)\cdot(-1) & 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-4) + (-5)\cdot 3 & 1\cdot 4 + (-4)\cdot(-5) + (-5)\cdot 4 \\ -1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot(-1) & -1\cdot 3 + 3\cdot(-4) + 4\cdot 3 & -1\cdot 4 + 3\cdot(-5) + 4\cdot 4 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^3_{3x3} = A_{3x3} \cdot A_{3x3} \cdot A_{3x3} = A^2_{3x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & -1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 1\cdot 3 & -1\cdot 4 + 0\cdot(-5) + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 0 + 4\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 4\cdot(-4) + 4\cdot 3 & 1\cdot 4 + 4\cdot(-5) + 4\cdot 4 \\ -1\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) & -1\cdot 3 + (-3)\cdot(-4) + (-3)\cdot 3 & -1\cdot 4 + (-3)\cdot(-5) + (-3)\cdot 4 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = -I_3$$

Solución:

La igualdad se cumple puesto que $A^3 = -I$

b) Una matriz cuadra tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero, calcularemos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2+C_3} \begin{vmatrix} \cancel{0} & 3 & 4 \\ \cancel{0} & -1 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{4} \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4) = -1 \neq 0 \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La inversa de la matriz A es $A^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$

c) Para determinar A^{100} de forma razonable por el apartado $a)$ sabemos que $A^3 = -I$, por tanto se trata de una matriz cíclica que cada cierto número de multiplicaciones nos aparecerá $-I$, buscaremos cuantas veces se produce dicho ciclo dividiendo 100 entre 3 y posteriormente aplicaremos la siguiente expresión.

Uno de los métodos para calcular la matriz enésima consiste en buscar un patrón, es decir que encontremos una progresión en los coeficientes de la propia matriz, o bien que nuestra matriz sea cíclica y cada cierto número de multiplicaciones nos aparezca la misma matriz.

Si $A^d = -I$ y necesitamos A^D entonces sabemos que

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \cline{2-2} \boxed{R} & C \end{array}$$

$$A^D = \left(A^d\right)^C \cdot A^R \tag{2}$$

En primer lugar dividiremos 100 entre 3

$$\begin{array}{c|c} 100 & 3 \\ \cline{2-2} & 33 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

Aplicamos la expresión anterior (2) para determinar A^{100}

$A^{100} = \left(A^3\right)^{33} \cdot A^1$

Como $A^3 = -I \rightarrow A^{100} = (-I)^{33} \cdot A$

y $\quad (-I)^{33} = -I \rightarrow A^{100} = -I \cdot A$

Sabemos que $\quad -I \cdot A = -A \rightarrow A^{100} = -A$

La potencia enésima de una matriz diagonal A es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal se encuentran elevados a dicha potencia.

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{pmatrix}$$

En nuestro caso al tratarse de menos la matriz identidad su enésima potencia dependerá si el exponente es par o impar.

$$(-I)^{\text{Potencia par}} = I \qquad (-I)^{\text{Potencia Impar}} = -I$$

Solución:

La matriz pedida es $A^{100}_{3x3} = -A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}_{3x3}$