

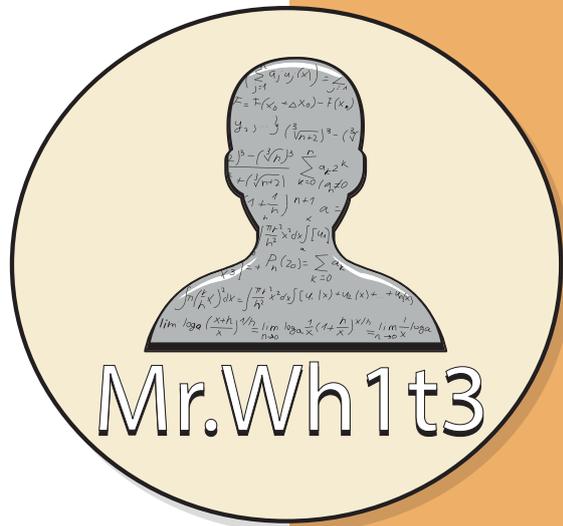


BLOQUE 1: MATRICES Y DETERMINANTES

MATRIZ

INVERSA 2011





ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA
DE
CONTENIDO

2011. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.	4
2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.	7
2011. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.	11
2011. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.	15
2011. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.	18

2011. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1,25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

b) [1,25 puntos] Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifique la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

a) Denotamos B a la matriz resultante $A^2 + 3A$.

Una matriz cuadrada B no tiene inversa si

$$|B| = 0$$

$$\begin{aligned} A_{2 \times 2}^2 &= A_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 1) + 0 \cdot 1 & (\lambda + 1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (\lambda + 1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

$$3 \cdot A_{2 \times 2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (\lambda + 1) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{aligned} B_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} + \begin{pmatrix} 3\lambda + 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^2 + 3\lambda + 3 & 0 + 0 \\ \lambda + 3 & 1 + (-3) \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Calculamos $|B|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de λ para los cuales no posee inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 5\lambda + 4) \cdot (-2) - (\lambda + 3) \cdot 0 = -2 \cdot (\lambda^2 + 5\lambda + 4)$$

$$|B| = -2 \cdot (\lambda^2 + 5\lambda + 4) \quad \left| \quad -2 \cdot (\lambda^2 + 5\lambda + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} -2 \neq 0 \\ \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \\ \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2} \\ \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -4 \end{cases} \right.$$

$$|B| = 0$$

Los valores que provocan que la matriz B no tenga inversa son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -4$.

Solución:

La matriz resultante de realizar la operación $A^2 + 3A$ no tendrá inversa si $|A^2 + 3A| = 0$ que solo es posible para $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -4$.

b) Para $\lambda = 0$ tenemos que la matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial.

$$A \cdot X + A = 2 \cdot I$$

Pasamos la matriz A al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A \cdot X + A = 2 \cdot I \rightarrow A \cdot X = 2 \cdot I - A$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X , multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1} .

$$A \cdot X = 2 \cdot I - A \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2 \cdot I - A)$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (2 \cdot I - A)$$

$$\text{y } I \cdot X = X \rightarrow X = A^{-1} \cdot (2 \cdot I - A)$$

Si realizamos la multiplicación y aplicamos la definición de matriz inversa obtendremos una ecuación más sencilla.

$$X = A^{-1} \cdot (2 \cdot I - A) \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2 \cdot I - A^{-1} \cdot A$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow X = 2 \cdot A^{-1} \cdot I - I$$

$$\text{y } A^{-1} \cdot I = A^{-1} \rightarrow X = 2 \cdot A^{-1} - I$$

El producto de matrices, A y B , no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de una matriz por un escalar, k , si cumple dicha propiedad.

$$A \cdot k \cdot B = k \cdot A \cdot B$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = 2 \cdot A^{-1} - I$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1} , $2 \cdot A^{-1}$ y posteriormente $2 \cdot A^{-1} - I$. Antes de nada comprobaremos que A tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calculamos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{cof}(A))^t \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot -1 & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 0 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(\text{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener su inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Calculamos $2 \cdot A^{-1}$.

$$2 \cdot A_{2 \times 2}^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Realizamos $2 \cdot A^{-1} - I$ para obtener la matriz X .

$$X = 2 \cdot A_{2 \times 2}^{-1} - I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 \\ 2-0 & -2-1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$.

2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1,25 puntos] Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.

b) [1,25 puntos] Para $\alpha = 3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

a) Para obtener los valores de α que verifican la igualdad dada en el enunciado en primer lugar calcularemos $\frac{1}{12} \cdot A$ y posteriormente A^{-1} , que quedará en función del parámetro α , mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{cof}(A))^t \quad (1)$$

$$\frac{1}{12} \cdot A = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{\alpha}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

A continuación A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 3 - (-\alpha) \cdot 1 = 4\alpha$$

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, por lo tanto sabemos que $\alpha \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 3 & (-1)^{1+2} \cdot (-\alpha) \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot \alpha \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(\text{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Como $A^{-1} = \frac{1}{12}A$, entonces ambas matrices deben de ser iguales lo que significa que cada uno de sus coeficientes deben de coincidir, por ello igualaremos coeficiente a coeficiente para obtener un sistema de ecuaciones que al resolverlo obtendremos, si existen, los valores de α .

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{-\alpha}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\frac{3}{4\alpha} = \frac{\alpha}{12} \quad \frac{-1}{4\alpha} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido.

$$\frac{3}{4\alpha} = \frac{\alpha}{12}; \quad 3 \cdot 12 = 4\alpha \cdot \alpha; \quad 36 = 4\alpha^2; \quad \alpha^2 = 9; \quad \alpha = \pm\sqrt{9} \rightarrow \alpha = \pm 3$$

$$\frac{-1}{4\alpha} = \frac{1}{12}; \quad -12 = 4\alpha; \quad \alpha = \frac{-12}{4} \rightarrow \alpha = -3$$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ se trata de una igualdad que es cierta, si no fuera cierta no sería posible que ambas matrices sean iguales.

Para que se cumplan todas las igualdades deben de coincidir las soluciones obtenidas en cada una de las ecuaciones, en este caso el único valor de α que verifica todas las igualdades es $\alpha = -3$.

Solución:

Para $\alpha = -3$ se verifica la igualdad $A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot A$.

b) Sustituimos el valor de $\alpha = -3$ para obtener la matriz A que usaremos en el ejercicio.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^t \cdot X = B$$

Como A se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X , multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1} .

$$A^t \cdot X = B \rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot B$$

$$\text{Como } (A^t)^{-1} \cdot A^t = I \rightarrow I \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot B$$

$$\text{y } I \cdot X = X \rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot B$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = (A^t)^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $(A^t)^{-1}$ y posteriormente $(A^t)^{-1} \cdot B$.

Por las propiedades de la matriz sabemos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, podemos calcular $(A^t)^{-1}$ muy rápidamente si primero calculamos A^{-1} y posteriormente calculamos su traspuesta. Gracias al apartado anterior

para $\alpha = -3$ se verifica que $A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot A$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Calculamos su traspuesta para obtener la inversa que necesitamos.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Realizamos $(A^t)^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz X .

$$X = (A^t)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) & -\frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 & -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 \\ \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) & \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 & \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$.

2011. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?

b) [1,5 puntos] Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$.

a) Calculamos $|A|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de λ para los cuales no posee inversa.

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si

$$|A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot [\lambda \cdot \lambda - (-1) \cdot 1] = \lambda^2 + 1$$

$$\begin{array}{l} |A| = \lambda^2 + 1 \\ |A| = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \end{array} \right.$$

No hemos podido obtener una solución real de la ecuación, por lo tanto no existe ningún valor de λ que provoque que $|A| = 0$ y en consecuencia la matriz A siempre tendrá inversa.

Solución:

La matriz A tendrá inversa para $\lambda \in \mathbb{R}$ al no existir ningún valor de λ que provoque que $|A| = 0$.

b) Para $\lambda = 1$ tenemos que

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B$$

Como A^{-1} se encuentra a la izquierda de la matriz X , multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A .

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B \rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A = A \cdot B$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow I \cdot X \cdot A = A \cdot B$$

$$\text{y } I \cdot X = X \rightarrow X \cdot A = A \cdot B$$

Como A se encuentra a la derecha de la matriz X , multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1} .

$$X \cdot A = A \cdot B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$\text{y } X \cdot I = X \rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1} , $A \cdot B$ y posteriormente $A \cdot B \cdot A^{-1}$.

La matriz A posee inversa porque según el apartado anterior no existe ningún valor de λ que provoque que $|A| = 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso λ , así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{cof}(A))^t \quad (1)$$

$$|A| = \lambda^2 + 1 \quad \Bigg| \quad |A| = (1)^2 + 1 = 2$$

para $\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(\text{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa.

$$A_{3 \times 3}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Calculamos $A \cdot B$.

$$\begin{aligned} A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned}$$

Realizamos $A \cdot B \cdot A^{-1}$ para obtener la matriz X .

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de un escalar k por una matriz A si posee dicha propiedad.

$$k \cdot A = A \cdot k$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es

$$X_{3 \times 3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2011. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) [1,5 puntos] Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

a) Calculamos la matriz pedida $A - 2I$, para ello obtenemos en primer lugar $2 \cdot I$

$$2 \cdot I_{3 \times 3} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si

$$|A| = 0$$

$$A_{3 \times 3} - 2 \cdot I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3-2 & 0-0 & \lambda-0 \\ -5-0 & \lambda-2 & -5-0 \\ \lambda-0 & 0-0 & 3-2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Calculamos $|A_{3 \times 3} - 2 \cdot I_{3 \times 3}|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de λ para los cuales no posee inversa.

$$|A_{3 \times 3} - 2 \cdot I_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} 1 & \emptyset & \lambda \\ \cancel{-5} & \cancel{\lambda-2} & \cancel{-5} \\ \lambda & \emptyset & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot [1 - \lambda^2]$$

$$|A_{3 \times 3} - 2 \cdot I_{3 \times 3}| = (\lambda - 2) \cdot [1 - \lambda^2] \quad \left| \begin{array}{l} (\lambda - 2) \cdot [1 - \lambda^2] = 0 \\ |A_{3 \times 3} - 2 \cdot I_{3 \times 3}| = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 2 \end{array} \right.$$

Los únicos valores que provocan que la matriz $A - 2I$ no tenga inversa son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$, por lo tanto para el resto de valores sí tendrá inversa.

Solución:

La matriz $A - 2I$ tendrá inversa cuando $|A - 2I| \neq 0$ que solo es posible para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$.

b) Para $\lambda = -2$ tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial.

$$A \cdot X = 2 \cdot X + I$$

Pasamos la matriz $2X$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A \cdot X = 2 \cdot X + I \rightarrow A \cdot X - 2 \cdot X = I$$

Nos encontramos dos matrices X , para poder despejarla debemos sacarle factor común por el lado correcto, en este caso como X está multiplicando a la derecha de nuestra matriz A se encontrará por ese mismo lado al sacar factor común.

$$A \cdot X - 2 \cdot X = I \rightarrow (A - 2 \cdot I) \cdot X = I$$

Denotamos B a la matriz obtenida de realizar la operación $A - 2 \cdot I$.

$$\begin{aligned} B &= A - 2 \cdot I \\ B \cdot X &= I \end{aligned}$$

Como B se encuentra a la izquierda de la matriz X , multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por B^{-1} .

$$B \cdot X = I \rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot I$$

$$\text{Como } B^{-1} \cdot B = I \rightarrow I \cdot X = B^{-1} \cdot I$$

$$\text{y } I \cdot X = X \rightarrow X = B^{-1}$$

$$\text{y } B^{-1} \cdot I = B^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = B^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos B^{-1} . Gracias al apartado anterior la matriz $B = A - 2I$ posee inversa porque $\lambda \neq \pm 1$ y $\lambda \neq 2$, por lo tanto para $\lambda = -2$ el $|B| \neq 0$, calculamos su inversa mediante la siguiente expresión:

$|B|$ ya lo tenemos resuelto pero en función de un parámetro, en este caso λ , así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(B)^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{cof}(B))^t \quad (1)$$

$$|B| = (\lambda - 2) \cdot [1 - \lambda^2] \quad |B| = ((-2) - 2) \cdot [1 - (-2)^2] = 12$$

para $\lambda = -2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \text{cof}(B) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\text{cof}(B) = \begin{pmatrix} 4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(\text{cof}(B))^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa deseada.

$$B^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{15}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{15}{12} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es

$$X_{3 \times 3} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{15}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{15}{12} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2011. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) [0,5 puntos] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
 b) [1,25 puntos] Justifica que A es invertible y halla su inversa.
 c) [0,75 puntos] Calcula razonadamente A^{100} .

a) Para demostrar la igualdad dada necesitaremos calcular previamente A^2 y posteriormente A^3 .

$$\begin{aligned} A_{3 \times 3}^2 &= A_{3 \times 3} \cdot A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) + (-5) \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-4) \cdot (-5) + (-5) \cdot 4 \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{3 \times 3}^3 &= A_{3 \times 3} \cdot A_{3 \times 3} \cdot A_{3 \times 3} = A_{3 \times 3}^2 \cdot A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \\ -1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) + (-3) \cdot 3 & -1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = -I_3 \end{aligned}$$

Solución:La igualdad se cumple puesto que $A^3 = -I$

b) Una matriz cuadra tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero, calcularemos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2+C_3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{4} \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4) = -1 \neq 0 \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{cof}(A))^t \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(\text{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Solución:

La inversa de la matriz A es $A_{3 \times 3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

c) Para determinar A^{100} de forma razonable por el apartado a) sabemos que $A^3 = -I$, por tanto se trata de una matriz cíclica que cada cierto número de multiplicaciones nos aparecerá $-I$, buscaremos cuantas veces se produce dicho ciclo dividiendo 100 entre 3 y posteriormente aplicaremos la siguiente expresión.

Uno de los métodos para calcular la matriz enésima consiste en buscar un patrón, es decir que encontremos una progresión en los coeficientes de la propia matriz, o bien que nuestra matriz sea cíclica y cada cierto número de multiplicaciones nos aparezca la misma matriz.

Si $A^d = -I$ y necesitamos A^D entonces sabemos que

$$\begin{array}{l} D \\ \hline R \end{array} \left| \begin{array}{l} d \\ \hline C \end{array} \right. \\ A^D = (A^d)^C \cdot A^R \quad (2)$$

En primer lugar dividiremos 100 entre 3

$$\begin{array}{l} 100 \\ \hline 3 \\ \hline 33 \\ \hline 1 \end{array}$$

Aplicamos la expresión anterior (2) para determinar A^{100}

$$A^{100} = (A^3)^{33} \cdot A^1$$

$$\text{Como } A^3 = -I \rightarrow A^{100} = (-I)^{33} \cdot A$$

$$\text{y } (-I)^{33} = -I \rightarrow A^{100} = -I \cdot A$$

$$\text{Sabemos que } -I \cdot A = -A \rightarrow A^{100} = -A$$

La potencia enésima de una matriz diagonal A es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal se encuentran elevados a dicha potencia.

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{pmatrix}$$

En nuestro caso al tratarse de menos la matriz identidad su enésima potencia dependerá si el exponente es par o impar.

$$(-I)^{\text{Potencia par}} = I \quad (-I)^{\text{Potencia Impar}} = -I$$

Solución:

$$\text{La matriz pedida es } A_{3 \times 3}^{100} = -A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$