Bloque 1: Matrices y Determinantes

Ecuaciones

Matriciales 2011

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1,25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz A^2+3A no tiene inversa.

b) [1,25 puntos] Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifique la ecuación $AX + A = 2I$,siendo I la matriz identidad de orden 2.

---

a) Denotamos B a la matriz resultante A^2+3A.

> Una matriz cuadrada B no tiene inversa si
>
> $$|B| = 0$$

$$A^2_{2x2} = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda+1)\cdot(\lambda+1)+0\cdot 1 & (\lambda+1)\cdot 0+0\cdot(-1) \\ 1\cdot(\lambda+1)+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 0+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$3\cdot A_{2x2} = 3\cdot \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3\cdot(\lambda+1) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B_{2x2} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2+3\lambda+3 & 0+0 \\ \lambda+3 & 1+(-3) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \lambda^2+5\lambda+4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos $|B|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de λ para los cuales no posee inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} \lambda^2+5\lambda+4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{vmatrix} = (\lambda^2+5\lambda+4)\cdot(-2) - (\lambda+3)\cdot 0 = -2\cdot(\lambda^2+5\lambda+4)$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

$$|B| = -2\cdot\left(\lambda^2+5\lambda+4\right) \quad \Bigg| \quad -2\cdot\left(\lambda^2+5\lambda+4\right)=0 \rightarrow \begin{cases} -2\neq 0 \\ \lambda^2+5\lambda+4=0 \\ \lambda = \dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \dfrac{-5\pm 3}{2} \\ \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-4 \end{cases}$$

$$|B| = 0$$

Los valores que provocan que la matriz B no tenga inversa son $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=-4$.

Solución:

La matriz resultante de realizar la operación A^2+3A no tendrá inversa si $\left|A^2+3A\right|=0$ que solo es posible para $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=-4$.

b) Para $\lambda=0$ tenemos que la matriz A es de la forma

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial.

$$A\cdot X+A=2\cdot I$$

Pasamos la matriz A al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A\cdot X+A=2\cdot I\rightarrow A\cdot X=2\cdot I-A$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A\cdot X=2\cdot I-A\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(2\cdot I-A)$$

$$\text{Como } A\cdot A^{-1}=I\rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot(2\cdot I-A)$$

$$\text{y} \quad I\cdot X=X\rightarrow X=A^{-1}\cdot(2\cdot I-A)$$

Si realizamos la multiplicación y aplicamos la definición de matriz inversa obtendremos una ecuación más sencilla.

El producto de matrices, A y B, no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de una matriz por un escalar, k, si cumple dicha propiedad.

$$A\cdot k\cdot B=k\cdot A\cdot B$$

$$\begin{array}{lcl} X=A^{-1}\cdot(2\cdot I-A) & \rightarrow & X=A^{-1}\cdot 2\cdot I-A^{-1}\cdot A \\ \text{Como } A^{-1}\cdot A=I & \rightarrow & X=2\cdot A^{-1}\cdot I-I \\ \text{y} \quad A^{-1}\cdot I=A^{-1} & \rightarrow & X=2\cdot A^{-1}-I \end{array}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = 2 \cdot A^{-1} - I$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $A^{-1}, 2 \cdot A^{-1}$ y posteriormente $2 \cdot A^{-1} - I$. Antes de nada comprobaremos que A tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -1 \neq 0 \to \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calculamos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\ (A))^t \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \to cof\ (A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot -1 & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 0 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener su inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos $2 \cdot A^{-1}$.

$$2 \cdot A^{-1}_{2x2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $2 \cdot A^{-1} - I$ para obtener la matriz X.

$$X = 2 \cdot A^{-1}_{2x2} - I_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 \\ 2-0 & -2-1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{2x2}$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) [1,75 puntos] Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.
b) [0,75 puntos] Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

---

a) A es una matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz nula, por lo tanto sabemos que su rango siempre irá comprendido entre

El rango nos indica el número de filas o columnas que son independientes, por las propiedades de los determinantes sabemos que si el $|A| = 0$ existe combinación lineal entre ellas, al imponerle dicha condición descubriremos los valores de α para los cuales existe combinación lineal.

$$1 \leq r(A) \leq min\{filas,\ columnas\}$$

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

Calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot \alpha \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) \cdot \alpha - 1 \cdot 1 \cdot \alpha =$$

$$= \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

Imponemos la condición $|A| = 0$:

$$\left. \begin{array}{rcl} |A| & = & \alpha^3 - 3\alpha + 2 \\ |A| & = & 0 \end{array} \right| \quad \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \quad \text{resolvemos por Ruffini}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\rightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 2)$$

Como $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$ entonces $(\alpha - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 2) = 0$

$$\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -2$$
$$\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1$$
$$\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

A continuación estudiaremos el rango de la matriz A, para los casos: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

i) Para $\alpha_1 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de α el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

ii) Para $\alpha_2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 2$
No puede ser 3 porque para dicho valor de α el determinante de A es cero, lo obligamos al a principio del apartado.

Todos los determinantes de los menores de orden 2 que podemos formar valen cero, por lo tanto podemos afirmar que $r(A) = 1$, si te fijas con atención descubrirás que las dos primeras filas son iguales y que si multiplicas la primera por -1 obtienes la 3.

iii)Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ el $|A| \neq 0$, puesto que los únicos valores que lo hacían cero eran $\alpha = -2$ y $\alpha = 1$, así que siempre tenderemos un menor de orden 3 cuyo determinante será distinto de cero y en consecuencia el $r(A) = 3$.

Solución:

Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ el $r(A) = 3$.
Para $\alpha = -2$ el $r(A) = 2$.
Para $\alpha = 1$ el $r(A) = 1$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Para $\alpha = 2$ la matriz A será de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1} y posteriormente $A^{-1} \cdot B$.

La matriz A posee inversa porque $|A| \neq 0$ para $\alpha = 2$, debido a que solo es posible que valga cero para $\alpha = -2$ y 1, calculamos su inversa mediante la siguiente expresión:

> $|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso α, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$|A| = \alpha^3 - 3\alpha + 2$ para $\alpha = 2$	$|A| = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = A^{-1}_{3x3} \cdot B_{3x1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3x1} =$$

$$X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ $\quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1,25 puntos] Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.
b) [1,25 puntos] Para $\alpha = 3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

---

a) Para obtener los valores de α que verifican la igualdad dada en el enunciado en primer lugar calcularemos $\frac{1}{12} \cdot A$ y posteriormente A^{-1}, que quedará en función del parámetro α, mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\ (A))^t \tag{1}$$

$$\frac{1}{12} \cdot A = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{-\alpha}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2}$$

A continuación A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 3 - (-\alpha) \cdot 1 = 4\alpha$$

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, por lo tanto sabemos que $\alpha \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}_{2x2} \to cof\ (A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 3 & (-1)^{1+2} \cdot (-\alpha) \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot \alpha \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}_{2x2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Como $A^{-1} = \dfrac{1}{12}A$, entonces ambas matrices deben de ser iguales lo que significa que cada uno de sus coeficientes deben de coincidir, por ello igualaremos coeficiente a coeficiente para obtener un sistema de ecuaciones que al resolverlo obtendremos, si existen, los valores de α.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{4\alpha} & \dfrac{-1}{4\alpha} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{-\alpha}{12} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$\begin{matrix} \dfrac{3}{4\alpha} = \dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{-1}{4\alpha} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{4} = \dfrac{-\alpha}{12} & \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \end{matrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido.

$\dfrac{3}{4\alpha} = \dfrac{\alpha}{12}; \quad 3 \cdot 12 = 4\alpha \cdot \alpha; \quad 36 = 4\alpha^2; \quad \alpha^2 = 9; \quad \alpha = \pm\sqrt{9} \to \alpha = \pm 3$

$\dfrac{-1}{4\alpha} = \dfrac{1}{12}; \quad -12 = 4\alpha; \quad \alpha = \dfrac{-12}{4} \to \alpha = -3$

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ se trata de una igualdad que es cierta, si no fuera cierta no sería posible que ambas matrices sean iguales.

Para que se cumplan todas las igualdades deben de coincidir las soluciones obtenidas en cada una de las ecuaciones, en este caso el único valor de α que verifica todas las igualdades es $\alpha = -3$.

Solución:

Para $\alpha = -3$ se verifica la igualdad $A^{-1} = \dfrac{1}{12} \cdot A$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Sustituimos el valor de $\alpha = -3$ para obtener la matriz A que usaremos en el ejercicio.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^t \cdot X = B$$

Como A se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A^t \cdot X = B \rightarrow \left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t \cdot X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$$

$$\text{Como } \left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t = I \rightarrow I \cdot X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $\left(A^t\right)^{-1}$ y posteriormente $\left(A^t\right)^{-1} \cdot B$.
Por las propiedades de la matriz sabemos que $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$, podemos calcular $\left(A^t\right)^{-1}$ muy rápidamente si primero calculamos A^{-1}y posteriormente calculamos su traspuesta. Gracias al apartado anterior para $\alpha = -3$ se verifica que $A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot A$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos su traspuesta para obtener la inversa que necesitamos.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Realizamos $\left(A^t\right)^{-1} \cdot B$ para obtener la matriz X.

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) & \frac{-1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 & \frac{-1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 \\ \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) & \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 & \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}_{2x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}_{2x3}$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2011. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?

b) [1,5 puntos] Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$.

---

a) Calculamos $|A|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de λ para los cuales no posee inversa.

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si

$$|A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \lambda & 1 \\ \cancel{0} & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot [\lambda \cdot \lambda - (-1) \cdot 1] = \lambda^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \lambda^2 + 1 \\ |A| = 0 \end{array} \right| \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} \nexists \mathbb{R}$$

No hemos podido obtener una solución real de la ecuación, por lo tanto no existe ningún valor de λ que provoque que $|A| = 0$ y en consecuencia la matriz A siempre tendrá inversa.

Solución:

La matriz A tendrá inversa para $\lambda \in \mathbb{R}$ al no existir ningún valor de λ que provoque que $|A| = 0$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Para $\lambda = 1$ tenemos que

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B$$

Como A^{-1} se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A.

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B \rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A = A \cdot B$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow I \cdot X \cdot A = A \cdot B$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X \cdot A = A \cdot B$$

Como A se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$X \cdot A = A \cdot B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, $A \cdot B$ y posteriormente $A \cdot B \cdot A^{-1}$.

La matriz A posee inversa porque según el apartado anterior no existe ningún valor de λ que provoque que $|A| = 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

> $|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso λ, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$\lvert A\rvert = \lambda^2 + 1$ para $\lambda = 1$	$\lvert A\rvert = (1)^2 + 1 = 2$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}_{3x3}\rightarrow cof\left(A\right)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}&(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}\\(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\-1&1\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\\(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\left(A\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$\left(cof\left(A\right)\right)^{t}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa.

$$A^{-1}_{3x3}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}_{3x3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $A\cdot B$.

$$A_{3x3}\cdot B_{3x3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}_{3x3}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_{3x3}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0&1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\\0\cdot0+1\cdot1+1\cdot0&0\cdot0+1\cdot0+1\cdot1&0\cdot0+1\cdot0+1\cdot0\\0\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot0&0\cdot0+(-1)\cdot0+1\cdot1&0\cdot1+(-1)\cdot0+1\cdot0\end{pmatrix}_{3x3}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}_{3x3}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Realizamos $A \cdot B \cdot A^{-1}$ para obtener la matriz X.

> El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de un escalar k por una matriz A si posee dicha propiedad.
>
> $$k \cdot A = A \cdot k$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es

$$X_{3x3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2011. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix} \qquad y \qquad A-B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2.
b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$.

Los sistemas de ecuaciones matriciales los podemos resolver por igualación, sustitución, reducción o doble reducción.

a) El producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa debido a ello no tiene porque cumplirse la igualdad $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ a no ser que las matrices A y B sean conmutables, es decir que $A\cdot B=B\cdot A$, pero desconocemos ambas matrices, por lo tanto resolveremos el sistema dado para obtenerlas, por ejemplo por reducción.

$$\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}\\ \hline 2\text{A}=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$2\cdot A=\begin{pmatrix}4+2&2+4\\3+(-1)&2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\2&4\end{pmatrix}$$

Despejamos A multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6&6\\2&4\end{pmatrix}\rightarrow A_{2x2}=\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}_{2x2}$$

Una vez obtenida la matriz A despejamos la matriz B de una de las ecuaciones dadas, por ejemplo:

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}_{2x2}$$

Pasamos la matriz A al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}_{2x2}\rightarrow B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}_{2x2}-A_{2x2}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Para obtener la matriz B calcularemos $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} - A_{2x2}$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-3 \\ 3-1 & 2-2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Ahora que tenemos ambas matrices comprobamos si son conmutables, para ver si podemos resolverlo rápidamente.

$$A_{2x2} \cdot B_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 3 + 0\cdot 1 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Al no ser iguales ambas matrices, no conmutan por tanto la igualdad no se verificará, procedemos al cálculo pedido.

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 4\cdot 4 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 4 + 2\cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A^2_{2x2} = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 3\cdot 1 & 3\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B^2_{2x2} = B_{2x2} \cdot B_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix}_{2x2} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A^2_{2x2} - B^2_{2x2} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 12-(-1) & 15-(-1) \\ 5-2 & 7-(-2) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

Las matrices pedidas son $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}_{2x2}$ y $A^2_{2x2} - B^2_{2x2} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}_{2x2}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$X \cdot A - X \cdot B - (A+B)^t = 2 \cdot I$$

Pasamos la matriz $(A+B)^t$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X \cdot A - X \cdot B - (A+B)^t = 2 \cdot I \to X \cdot A - X \cdot B = 2 \cdot I + (A+B)^t$$

Nos encontramos dos matrices X, para poder despejarla debemos sacarle factor común por el lado correcto, en este caso como X se encuentra multiplicando por la izquierda de las matrices A y B se encontrará por ese mismo lado al sacar factor común.

$$X \cdot A - X \cdot B = 2 \cdot I + (A+B)^t \to X \cdot (A-B) = 2 \cdot I + (A+B)^t$$

Denotaremos C a la matriz obtenida de realizar la operación $A - B$.

$$\begin{aligned} C &= A - B \\ X \cdot C &= 2 \cdot I + (A+B)^t \end{aligned}$$

Como C se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por C^{-1}.

$$X \cdot C = 2 \cdot I + (A+B)^t \to X \cdot C \cdot C^{-1} = \left(2 \cdot I + (A+B)^t\right) \cdot C^{-1}$$

$$\text{Como } C \cdot C^{-1} = I \to X \cdot I = \left(2 \cdot I + (A+B)^t\right) \cdot C^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \to X = \left(2 \cdot I + (A+B)^t\right) \cdot C^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = \left(2 \cdot I + (A+B)^t\right) \cdot C^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos C^{-1}, $2 \cdot I$, $(A+B)^t$, $2 \cdot I + (A+B)^t$ y posteriormente $\left(2 \cdot I + (A+B)^t\right) \cdot C^{-1}$.

Antes de nada comprobaremos que C tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 8 \neq 0 \to \exists C^{-1}$$

Como $|C| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} (cof\,(C))^t \tag{1}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} \rightarrow cof\,(C) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 2 & (-1)^{1+2}\cdot(-1) \\ (-1)^{2+1}\cdot 4 & (-1)^{2+2}\cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(C))^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener su inversa.

$$C^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\_2x2$$

Calculamos $2\cdot I$, $(A+B)^t$, $2\cdot I + (A+B)^t$

$$2\cdot I_{2x2} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} \rightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$2\cdot I_{2x2} + (A+B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2+4 & 0+3 \\ 0+2 & 2+2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $\left(2\cdot I + (A+B)^t\right)\cdot C^{-1}$ para obtener la matriz X.

> El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de un escalar k por una matriz A si posee dicha propiedad.
>
> $$k\cdot A = A\cdot k$$

$$X = \left(2\cdot I + (A+B)^t\right)\cdot C^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 6\cdot 2+3\cdot 1 & 6\cdot(-4)+3\cdot 2 \\ 2\cdot 2+4\cdot 1 & 2\cdot(-4)+4\cdot 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -18 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \cdot 15 & \frac{1}{8} \cdot (-18) \\ \frac{1}{8} \cdot 8 & \frac{1}{8} \cdot 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{-9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es

$$X_{2x2} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -18 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{-9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2011. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) [1,5 puntos] Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

---

a) Calculamos la matriz pedida $A - 2I$, para ello obtenemos en primer lugar $2 \cdot I$

> Una matriz cuadrada A no tiene inversa si
>
> $|A| = 0$

$$2 \cdot I_{3x3} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A_{3x3} - 2 \cdot I_{3x3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 3-2 & 0-0 & \lambda-0 \\ -5-0 & \lambda-2 & -5-0 \\ \lambda-0 & 0-0 & 3-2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Calculamos $|A_{3x3} - 2 \cdot I_{3x3}|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de λ para los cuales no posee inversa.

$$|A_{3x3} - 2 \cdot I_{3x3}| = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & \lambda \\ \cancel{-5} & \cancel{\lambda-2} & \cancel{-5} \\ \lambda & \cancel{0} & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \cdot \left[1 - \lambda^2\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} |A_{3x3} - 2 \cdot I_{3x3}| = (\lambda-2) \cdot \left[1-\lambda^2\right] \\ |A_{3x3} - 2 \cdot I_{3x3}| = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (\lambda-2)\cdot\left[1-\lambda^2\right] = 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = \ \ 1 \end{array} \right. \\ \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 2 \end{array}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Los únicos valores que provocan que la matriz $A-2I$ no tenga inversa son $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ y $\lambda_3=2$, por lo tanto para el resto de valores sí tendrá inversa.

Solución:

La matriz $A-2I$ tendrá inversa cuando $|A-2I|\neq 0$ que solo es posible para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}$.

b) Para $\lambda=-2$ tenemos que

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2\\ -5 & -2 & -5\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}_{3x3}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial.

$$A\cdot X=2\cdot X+I$$

Pasamos la matriz $2X$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A\cdot X=2\cdot X+I\rightarrow A\cdot X-2\cdot X=I$$

Nos encontramos dos matrices X, para poder despejarla debemos sacarle factor común por el lado correcto, en este caso como X está multiplicando a la derecha de nuestra matriz A se encontrará por ese mismo lado al sacar factor común.

$$A\cdot X-2\cdot X=I\rightarrow (A-2\cdot I)\cdot X=I$$

Denotamos B a la matriz obtenida de realizar la operación $A-2\cdot I$.

$$\begin{aligned} B &= A-2\cdot I\\ B\cdot X &= I\end{aligned}$$

Como B se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por B^{-1}.

$$B\cdot X=I\rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X=B^{-1}\cdot I$$

$$\text{Como } B^{-1}\cdot B=I\rightarrow I\cdot X=B^{-1}\cdot I$$

$$\begin{array}{lll} \text{y} \quad I\cdot X=X & \rightarrow & X=B^{-1}\\ \text{y} \quad B^{-1}\cdot I=B^{-1} & & \end{array}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X=B^{-1}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Para obtener la matriz pedida calcularemos B^{-1}. Gracias al apartado anterior la matriz $B = A - 2I$ posee inversa porque $\lambda \neq \pm 1$ y $\lambda \neq 2$, por lo tanto para $\lambda = -2$ el $|B| \neq 0$, calculamos su inversa mediante la siguiente expresión:

$|B|$ ya lo tenemos resuelto pero en función de un parámetro, en este caso λ, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(B)^{-1} = \frac{1}{|B|}(cof\,(B))^t \tag{1}$$

$|B| = (\lambda - 2) \cdot \left[1 - \lambda^2\right]$ para $\lambda = -2$ | $|B| = ((-2) - 2) \cdot \left[1 - (-2)^2\right] = 12$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \rightarrow cof\,(B) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$cof\,(B) = \begin{pmatrix} 4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(B))^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa deseada.

$$B^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{15}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{15}{12} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es

$$X_{3x3} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{15}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{15}{12} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2011. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Demuestra que $A^2 + 2A = I$ y que $A^{-1} = A + 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
b) [1,5 puntos] Calcula la matriz X que verifica la ecuación $A^2 + XA + 5A = 4I$.

---

a) Para demostrar las igualdades dadas necesitaremos calcular previamente A^2, $2A$, $2I$, A^{-1} y posteriormente $A^2 + 2A$, $A + 2I$.

> Los sistemas de ecuaciones matriciales los podemos resolver por igualación, sustitución, reducción o doble reducción.

$$A^2_{2x2} = A_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$2 \cdot A_{2x2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$2 \cdot I_{2x2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Antes de nada comprobaremos que A tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\ (A))^t \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \rightarrow cof\ (A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot 2 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot (-1) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3+(-2) & -2+2 \\ -4+4 & 3+(-2) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Ahora calcularemos $A^2 + 2A$ y $A + 2I$, verificando que se obtiene I_{2x2} y A^{-1} respectivamente.

$$A^2 + 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3+(-2) & -2+2 \\ -4+4 & 3+(-2) \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = I_{2x2}$$

$$A + 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1+2 & 1+0 \\ 2+0 & -1+2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = A^{-1}_{2x2}$$

Solución:

Ambas igualdades se verifican.

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^2 + X \cdot A + 5 \cdot A = 4I$$

Pasamos la matriz A^2 y $5A$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A^2 + X \cdot A + 5 \cdot A = 4I \rightarrow X \cdot A = 4I - A^2 - 5 \cdot A$$

Como A se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$X \cdot A = 4I - A^2 - 5 \cdot A \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = \left(4I - A^2 - 5 \cdot A\right) \cdot A^{-1}$$

Si desarrollamos la multiplicación simplificaremos la ecuación

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = \left(4I - A^2 - 5 \cdot A\right) \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = 4I \cdot A^{-1} - A \cdot A \cdot A^{-1} - 5 \cdot A \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = 4I \cdot A^{-1} - A \cdot I - 5 \cdot I$$

$$\text{y} \quad A \cdot I = A \rightarrow X = 4 \cdot A^{-1} - A - 5 \cdot I$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Si sustituimos en la ecuación la igualdad dada $A^{-1} = A + 2 \cdot I$ que sabemos que se verifica gracias al apartado a) obtendremos la ecuación matricial totalmente simplificada.

$$\text{Como } A^{-1} = A + 2 \cdot I \rightarrow X = 4 \cdot (A + 2 \cdot I) - A - 5 \cdot I$$

$$X = 4 \cdot A + 8 \cdot I - A - 5 \cdot I \rightarrow X = 3 \cdot A + 3 \cdot I$$

Sacando factor común al 3

$$X = 3 \cdot (A + I)$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = 3 \cdot (A + I)$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $A + I$ y posteriormente $3 \cdot (A + I)$.

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1+1 & 1+0 \\ 2+0 & -1+1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $3 \cdot (A + I)$ para obtener la matriz X.

$$X = 3 \cdot (A + I) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.