Bloque 2: Sistema de Ecuaiones Lineales

Discusión de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2011

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda x+y+z & = & 1 \\ x+\lambda y+z & = & 2 \\ \lambda x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

a) [1,75 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones lineales en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda x+y+z & = & 1 \\ x+\lambda y+z & = & 2 \\ \lambda x+y+z & = & 1 \end{array}\right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro λ en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de λ que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} \cancel{-\lambda} & 1 & 1 \\ \cancel{1+\lambda} & \lambda-1 & 0 \\ \cancel{2\lambda} & \emptyset & \emptyset \end{vmatrix} = 2\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\lambda \cdot [1 \cdot 0 - (\lambda-1) \cdot 1] = -2\lambda \cdot (\lambda - 1)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A| = & -2\lambda \cdot (\lambda-1) \\ |A| = & 0 \end{array}\right| \; -2\lambda \cdot (\lambda-1) = 0 \left\{\begin{array}{r} -2\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 1 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r\left(M\right) \leq min\left\{filas,\ columnas\right\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero para los casos en los que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1 \leq r\left(A\right) \leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, así que para dichos casos solo buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r\left(A\right) \leq r\left(A'\right) \leq 3$.

i) Para $\lambda_1 = 0$.

Sustituimos el valor $\lambda = 0$ en la matrices A y A'.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r\left(A\right) \leq 2 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \rightarrow r\left(A\right) = 2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r\left(A\right) \leq r\left(A'\right) \leq 3 \\ 2 \leq r\left(A'\right) \leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r\left(A'\right) = 2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right) = 3$.

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(1\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r\left(A'\right) = 2$$

ii) Para $\lambda_2 = 1$.

Sustituimos el valor $\lambda = 1$ en la matrices A y A'.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0 \to r(A) = 2$$

- Rango de A':

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+F_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to r(A') = 3$$

iii) Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$, en consecuencia ambas matrices tendrán rango máximo.

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $\lambda = 0 \to r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $\lambda = 1 \to r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\} \to r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $\lambda = 0$, gracias al apartado anterior sabemos que tenemos un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1, para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro, quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ \cancel{y + z = 1} \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} x + z = 2 \\ y + z = 1 \end{array} \right.$$

Nuestro sistema se encuentra escalonado, a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & 2 \\ y + z & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rcl} x + (\theta) & = & 2 \\ y + (\theta) & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 - \theta \\ y & = & 1 - \theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. ,\ \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (2 - \theta;\ 1 - \theta;\ \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

La solución del sistema para $\lambda = 0$ es $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 - \theta \\ y & = & 1 - \theta \\ z & = & \theta \end{array} \right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (2 - \theta;\ 1 - \theta;\ \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

2011. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-2y+4z &=& 4 \\ 2x+z &=& a \\ -3x-3y+3z &=& -3 \end{array}\right.$$

a) [1,75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro a.
b) [0,75 puntos] Resuélvelo cuando sea posible.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-2y+4z=4 \\ 2x+z=a \\ -3x-3y+3z=-3 \end{array}\right. \to (A|B)=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ -3 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ -3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Al no aparecer el parámetro a en la matriz A podemos estudiar su rango desde el inicio del ejercicio al no depender de dicho parámetro, como el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(A) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en este caso estará comprendido entre 1 y 3.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 2\cdot(-2) = 4 \neq 0 \to r(A) \geq 2$, buscamos un menor de orden 3, solo hay uno que es la propia matriz.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-2C_3} \begin{vmatrix} -6 & -2 & \cancel{4} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -9 & -3 & \cancel{3} \end{vmatrix} = -(1)\cdot \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Si un determinante tiene dos} \\ \text{filas o columnas proporcionales} \\ \text{su determinante vale cero, } C_1=3C_2 \end{bmatrix} = 0 \to r(A)=2,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Para obtener los valores del parámetro nos apoyaremos en la matriz de ampliada A', seleccionaremos un menor de orden 3 que contenga al menor de orden 2 usado anteriormente, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de a que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) \cdot 4 + (-2) \cdot a \cdot (-3) - (-3) \cdot 0 \cdot 4 - (-3) \cdot a \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) =$$

$$= 12a - 36$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 12a - 36 \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right| \quad 12a - 36 = 0 \rightarrow a = 3$$

A continuación solamente deberemos estudiar el rango de A' mediante determinantes, para los casos: $a = 3$ y $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Pero no sin antes detenernos en ella por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Como sabemos que el rango de la matriz A siempre es dos para cualquier valor que tome a y en la matriz ampliada siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$, por lo tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $2 \leq r(A') \leq 3$. Así que para el caso $a = 3$ al usar el método del orlado a la hora de seleccionar al menor de orden 3 anterior sabemos que no existirá un menor de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si toma valores distinto de ellos existirá un menor de orden 3 cuyo determinante no valga cero y en consecuencia $r(A') = 3$.

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $a = 3 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con un grado de libertad.
- Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.

b) Solo es posible resolver los sistemas que sean Compatibles, solo lo resolveremos para $a = 3$ que por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos de eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-2y+4z=4 \\ 2x+z=3 \\ \cancel{-3x-3y+3z=-3} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-2y+4z=4 \\ 2x+z=3 \end{array}\right.$$

Ya tenemos el sistema escalonado, a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $x = \theta$ con $\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \theta \\ 2x-2y+4z &=& 4 \\ 2x+z &=& 3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \theta \\ 2\cdot(\theta)-2y+4z &=& 4 \\ 2\cdot(\theta)+z &=& 3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x &=& \theta \\ -2y+4z &=& 4-2\theta \\ z &=& 3-2\theta \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x &=& \theta \\ -2y+4\cdot(3-2\theta) &=& 4-2\theta \\ z &=& 3-2\theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x &=& \theta \\ y &=& 4-3\theta \\ z &=& 3-2\theta \end{array}\right. , \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (\theta;\ 4-3\theta;\ ,3-2\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

Solución:

Solo es posible solucionar el sistema para $a = 3$ siendo su solución $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& \theta \\ y &=& 4-3\theta \\ z &=& 3-2\theta \end{array}\right.$, con $\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = (\theta;\ 4-3\theta;\ ,3-2\theta)$, con $\in \mathbb{R}$.