Bloque 6: Espacio Euclideo

Vectores 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Sean los puntos $A\,(2,\ \lambda,\ \lambda)$, $B\,(-\lambda,\ 2,\ 0)$ y $C\,(0,\ \lambda,\ \lambda-1)$.

a) [1 punto] ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifique la respuesta.

b) [1,5 puntos] Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

---

a) Creamos dos vectores partiendo desde un mismo punto que serán en nuestro caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-\lambda,\ 2,\ 0) - (2,\ \lambda,\ \lambda) =$$

$$= (\lambda - 2,\ 2-\lambda,\ -\lambda)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ \lambda,\ \lambda-1) - (2,\ \lambda,\ \lambda) =$$

$$= (-2,\ 0,\ -1)$$

Dos vectores son $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son paralelos sin son proporcionales, por tanto deben de cumplir la siguiente condición.

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Si los tres puntos se encuentran alineados entonces los vectores formados entre ellos deben de ser paralelos, es decir proporcionales

$$\frac{\lambda-2}{-2} = \frac{2-\lambda}{0} = \frac{-\lambda}{-1}$$

Tenemos una triple igualdad que resolveremos igualando dos a dos.

$$\frac{\lambda-2}{-2} = \frac{2-\lambda}{0} \longrightarrow 0\cdot(\lambda-2) = -2\cdot(2-\lambda)\,;\ \ -4+2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$\frac{2-\lambda}{0} = \frac{-\lambda}{-1} \longrightarrow -1\cdot(2-\lambda) = 0\cdot(-\lambda)\,;\ \ -2+\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Hemos obtenido la misma solución por lo tanto es válida.

Solución:

Los tres puntos estarán alineados para $\lambda = 2$.

b) Para $\lambda = 1$ tenemos los siguientes puntos

$$A\,(2,\ 1,\ 1)\,,\ B\,(-1,\ 2,\ 0)\ \text{y}\ C\,(0,\ 1,\ 0)$$

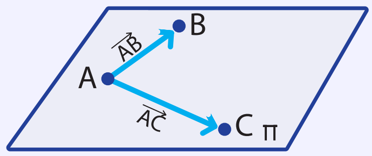
Para formar un plano con tres puntos estos no deben estar alineados, condición que no hace falta que comprobemos puesto que el enunciado nos dice que dichos puntos conforman un triángulo y para que ocurra los puntos no deben estar alineados, debemos obtener dos vectores libres, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) =$$

$$= (-1-2,\ 2-1,\ 0-1) = (-3,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) =$$

$$= (0-2,\ 1-1,\ 0-1) = (-2,\ 0,\ -1)$$



Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores directores de un plano y $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ un punto de este, podemos expresar el plano en forma general mediante la siguiente expresión

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

La distancia de un punto $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ se puede calcular como

$$dist\,(A,\ \pi) = \frac{|A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 + D|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Los vectores calculados son los vectores directores del plano pedido y uno de los puntos, que para facilitarnos los cálculos elegiremos el punto C (como en el enunciado nos preguntan la distancia entre un punto y un plano para aplicar la expresión de la distancia necesitamos el plano en forma general).

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot (-1) - (y-1) \cdot (3-2) + z \cdot 2 = -x - y + 1 + 2z \to \pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$$

Para calcular la distancia desde el origen de coordenadas, $O\,(0,\ 0,\ 0)$, al plano $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$ aplicaremos la expresión de la distancia de un punto a un plano.

$$dist\,(O,\ \pi) = \frac{|-1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,u = \frac{\sqrt{6}}{6}\,u$$

Solución:

El plano formado por los tres puntos dados en el enunciado para $\lambda = 1$ es $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$ y su distancia al origen de coordenadas es $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,u = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\,u.$