Bloque 6: Espacio Euclideo

Distancias 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 4.

Considera los puntos $A\,(1,\ 0,\ 2)$, $B\,(-1,\ 2,\ 4)$ y la recta r definida por

$$\frac{x+2}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$$

(a) [1,5 puntos] Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y B.
(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

---

a) Si A y B son simétricos respecto del plano π significa que la recta que une dichos punto es perpendicular al plano, $r \perp \pi \rightarrow v_r = n_r$ por lo tanto el vector normal de la recta (definido por los puntos A y B coincidirá con el vector normal del plano) y que el plano se encuentra justo en la mitad del segmento que los une, es decir que un punto del plano es el punto medio definido por A y B.

Primero calculamos el vector normal de mi plano que coincidirá con el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 4) - (1,\ 0,\ 2) =$$

$$= (-1-1,\ 2-0,\ 4-2) =$$

$$= (-2,\ 2,\ 2)$$

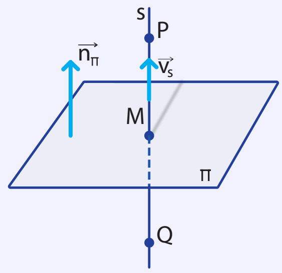
A continuación obtenemos el punto del plano que coincidirá con el punto medio determinado por los puntos facilitados en el ejercicio.

$$P_\pi = M = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\cdot[(1,\ 0,\ 2) + (-1,\ 2,\ 4)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+(-1)\,,\ 0+2,\ 2+4) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0,\ 2,\ 6) = (0,\ 1,\ 3)$$

Para determinar el plano π respecto del cual P y Q son simétricos.



- El plano es perpendicular a la recta definida por dichos puntos.

$$s \perp \pi \rightarrow v_s = n_\pi$$
$$\text{siendo } v_s = PQ$$

- Como los puntos son simétricos respecto del plano, entonces el plano se encuentra a la mitad del segmento que los une, por lo tanto pasa por su punto medio M.

$$P_\pi = M$$
$$\text{siendo } M = \frac{P+Q}{2}$$

- Definimos el plano en forma general.

Como la ecuación general de un plano es de la forma $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, donde las constantes A, B y C representan las componentes de su vector normal, como $\overrightarrow{n_\pi} = (-2,\ 2,\ 2)$ sabemos que $A = -2$, $B = 2$ y $C = 2$, en consecuencia el plano pedido será de la forma:

$$\pi \equiv -2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z + D = 0$$

$$\pi \equiv -2x + 2y + 2z + D = 0$$

Nos falta por determinar D, como debe pasar por el punto $P_\pi\,(0,\ 1,\ 3)$, sabemos que si un punto pertenece a un plano este debe verificar su ecuación, sencillamente sustituimos las coordenadas del punto M en la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x + 2y + 2z + D = 0 \\ \\ P_\pi\,(0,\ 1,\ 3) \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} -2 \cdot (0) + 2 \cdot (1) + 2 \cdot (3) + D = 0 \\ \\ D = -8 \end{array}$$

Solución:

La ecuación del plano pedido que cumple con las condiciones indicadas en el enunciado es $\pi \equiv -2x + 2y + 2z - 8 = 0$.

b) Antes de empezar a resolver el ejercicio obtendremos la información de la recta facilitada en forma continua.

$$r \equiv \frac{x+2}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$$

$$r \equiv \frac{x-(-2)}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$$

$$P_r\,(-2,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 3)$$

Una recta r expresada en forma continua tiene la expresión:

$$r \equiv \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

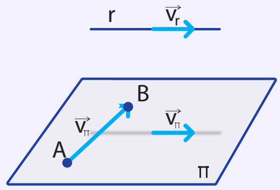
Donde los valores a, b y c representan un punto de la recta pero con el signo cambiado, $P_r = (a,\ b,\ c)$. Mientras que los valores que nos encontramos en el denominador son su vector director. $\overrightarrow{v_r} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$.

La recta r expresada en forma paramétrica es

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si un plano es paralelo a una recta se cumple que el vector director de la recta debe de coincidir con el vector director de mi plano y si este plano contiene a los puntos A y B entonces dichos puntos pertenecen al plano y podemos formar un vector director con ellos.

Si un plano es paralelo a una recta entonces sabemos que el vector director de la recta coincidirá con uno de los vectores directores del plano, además si un plano contiene a dos puntos sabemos que un vector directo del plano coincidirá con el vector formado por dichos puntos.



La ecuación general de un plano formado por sus vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y un punto $P(a, b, c)$, se obtiene como:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv \begin{cases} r \parallel \pi: & \overrightarrow{v_{1\pi}} = \overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 3) \\ A \in \pi: & P_\pi = A\,(1,\ 0,\ 2) \\ B \in \pi: & P_\pi = B\,(-1,\ 2,\ 4) \end{cases}$$

Podemos definir un plano con dos vectores directores libres y un punto, el vector que nos falta estará formado por el vector que une los puntos A y B:

$$\overrightarrow{v_{2\pi}} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 4) - (1,\ 0,\ 2) =$$

$$\overrightarrow{v_{2\pi}} = (-1-1,\ 2-0,\ 4-2) = (-2,\ 2,\ 2)$$

Calculamos el plano pedido:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot(-4) - (y)\cdot(10) + (z-2)\cdot(6) =$$

$$= -4x + 4 - 10y + 6z - 12 = -4x - 10y + 6z - 8 = 0$$

Simplificamos el plano obtenido dividiéndolo entre -2

$$\pi \equiv 2x + 5y - 3z + 4 = 0$$

Solución:

La ecuación del plano pedido que cumple con las condiciones indicadas en el enunciado es $\pi \equiv 2x + 5y - 3z + 4 = 0$.

2010. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 4.

Sean los puntos $A\,(2,\ \lambda,\ \lambda)$, $B\,(-\lambda,\ 2,\ 0)$ y $C\,(0,\ \lambda,\ \lambda-1)$.

a) [1 punto] ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifique la respuesta.

b) [1,5 puntos] Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

---

a) Creamos dos vectores partiendo desde un mismo punto que serán en nuestro caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Dos vectores son $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son paralelos sin son proporcionales, por tanto deben de cumplir la siguiente condición.

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-\lambda,\ 2,\ 0) - (2,\ \lambda,\ \lambda) =$$

$$= (\lambda - 2,\ 2 - \lambda,\ -\lambda)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ \lambda,\ \lambda - 1) - (2,\ \lambda,\ \lambda) =$$

$$= (-2,\ 0,\ -1)$$

Si los tres puntos se encuentran alineados entonces los vectores formados entre ellos deben de ser paralelos, es decir proporcionales

$$\frac{\lambda - 2}{-2} = \frac{2 - \lambda}{0} = \frac{-\lambda}{-1}$$

Tenemos una triple igualdad que resolveremos igualando dos a dos.

$$\frac{\lambda - 2}{-2} = \frac{2 - \lambda}{0} \rightarrow 0 \cdot (\lambda - 2) = -2 \cdot (2 - \lambda)\,; \quad -4 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$\frac{2 - \lambda}{0} = \frac{-\lambda}{-1} \rightarrow -1 \cdot (2 - \lambda) = 0 \cdot (-\lambda)\,; \quad -2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Hemos obtenido la misma solución por lo tanto es válida.

Solución:

Los tres puntos estarán alineados para $\lambda = 2$.

b) Para $\lambda = 1$ tenemos los siguientes puntos

$$A\,(2,\ 1,\ 1)\,,\ B\,(-1,\ 2,\ 0)\ \text{ y } C\,(0,\ 1,\ 0)$$

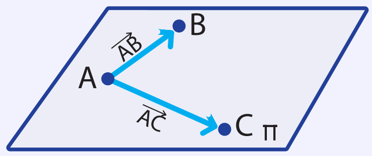
Para formar un plano con tres puntos estos no deben estar alineados, condición que no hace falta que comprobemos puesto que el enunciado nos dice que dichos puntos conforman un triángulo y para que ocurra los puntos no deben estar alineados, debemos obtener dos vectores libres, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) =$$

$$= (-1-2,\ 2-1,\ 0-1) = (-3,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) =$$

$$= (0-2,\ 1-1,\ 0-1) = (-2,\ 0,\ -1)$$



Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores directores de un plano y $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ un punto de este, podemos expresar el plano en forma general mediante la siguiente expresión

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

La distancia de un punto $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ se puede calcular como

$$dist\,(A,\ \pi) = \frac{|A\cdot a_1 + B\cdot a_2 + C\cdot a_3 + D|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Los vectores calculados son los vectores directores del plano pedido y uno de los puntos, que para facilitarnos los cálculos elegiremos el punto C (como en el enunciado nos preguntan la distancia entre un punto y un plano para aplicar la expresión de la distancia necesitamos el plano en forma general).

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot(-1) - (y-1)\cdot(3-2) + z\cdot 2 = -x - y + 1 + 2z \to \pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$$

Para calcular la distancia desde el origen de coordenadas, $O\,(0,\ 0,\ 0)$, al plano $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$ aplicaremos la expresión de la distancia de un punto a un plano.

$$dist\,(O,\ \pi) = \frac{|-1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,u = \frac{\sqrt{6}}{6}\,u$$

Solución:

El plano formado por los tres puntos dados en el enunciado para $\lambda = 1$ es $\pi \equiv -x - y + 2z + 1 = 0$ y su distancia al origen de coordenadas es $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,u = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\,u$.