Bloque 1: Matrices y Determinantes

Propiedades de los Determinantes 2010

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $det\,(A) = 4$. Se pide:

(a) [1,25 puntos] Halla $det\left(-3A^t\right)$ y $det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indicando las propiedades que utilizas.

(b) [0,75 puntos] Calcula $det\left(A^{-1}A^t\right)$ $\left(A^t \text{ es la matriz traspuesta de } A\right)$.

(c) [0,5 puntos] Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla $det\,(B)$.

Resolvemos todos los apartados aplicando las propiedades de los determinantes.

(a)

$$\left|-3A^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra}\\ \text{multiplicada por un mismo número, dicho número}\\ \text{podemos extraerlo fuera multiplicando al determinante.}\\ \text{En este caso tenemos las dos filas multiplicadas por } -3,\\ \text{extrañendo un } -3 \text{ por cada una de las filas.}\end{array}\right] = (-3)\cdot(-3)\cdot\left|A^t\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz cuadrada}\\ \text{cuadrada coincide con el determinante}\\ \text{de su traspuesta.}\end{array}\right] = (-3)^2\cdot|A| = (-3)^2\cdot 4 = 36$$

$$\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si una fila o columna de un determinante se encuentra multiplicada}\\ \text{por un mismo número, dicho número podemos extraerlo fuera}\\ \text{multiplicando al determinante. En este caso tenemos a la } F_1 \text{ multiplicada}\\ \text{por 2 y a } F_2 \text{ multiplicada por } -3.\end{array}\right] =$$

$$= 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{Si se permutan dos filas o columnas, el valor del determinante}\\ \text{queda multiplicado por } (-1)\text{, tantas veces como permutaciones}\\ \text{se hayan realizado, si nosotros intercambiamos la } C_1 \text{ por } C_2\\ \text{obtendremos la matriz dada en el enunciado.}\end{array}\right] =$$

$$= 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\left|A\right| = 2\cdot(-3)\cdot 4 = -24$$

Solución:

El $\left|-3A^t\right| = 36$ y $\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = -24$

b)

$$\left|A^{-1}\cdot A^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante del producto de dos matrices cuadradas}\\ \text{del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.}\end{array}\right] =$$

$$\left|A^{-1}\cdot A^t\right| = \left|A^{-1}\right|\cdot\left|A^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz inversa es igual}\\ \text{a la inversa de su determinante:}\\ A\cdot A^{-1} = I; \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I|\,; |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I|\\ \text{como } |I|\text{=1} \rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}\end{array}\right] =$$

$$\left|A^{-1}\cdot A^t\right| = \frac{1}{|A|}\cdot\left|A^t\right| = \left[\begin{array}{l}\text{El determinante de una matriz cuadrada}\\ \text{coincide con el determinantes de su traspuesta.}\end{array}\right] = \frac{1}{|A|}\cdot|A| = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

Solución:

El $\left|A^{-1}\cdot A^t\right| = 1$

c)

Aplicamos determinantes a ambos miembros de la ecuación.

$$\left|B^3\right| = |I|$$

El determinante de una matriz da como resultado un escalar, en consecuencia en una ecuación lo trataremos como un número, haciendo posible operaciones que no son válidas con las matrices.

Como $B^3 = B\cdot B\cdot B$ entonces $\left|B^3\right| = |B\cdot B\cdot B|$, como el determinante del producto de tres matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes tenemos.

$$|B|\cdot|B|\cdot|B| = |I|$$

$$|B|^3 = |I| \tag{1}$$

I representa la matriz identidad de la cual sabemos que su determinante siempre es 1.

$$\begin{aligned}|I| &= 1\\ |B|^3 &= 1\end{aligned}$$

Ahora despejamos de la ecuación (1) el $|B|$.

$$|B| = \sqrt[3]{1} = 1$$

Solución:

El $|B| = 1$