Bloque 1: Matrices y Determinantes

Matriz

Inversa 2010

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 4

2010. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 7

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3. 9

2010. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3. 12

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [0,5 puntos] Indica los valores de m para los que A es invertible.
(b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B).

(a) Calculamos $|A|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de m para los cuales no posee inversa.

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si $|A| = 0$, averiguaremos los valores de m para los cuales $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 + C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & m & 3 \\ \cancel{4} & 1 & 4-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & 4-m \end{vmatrix} = 1 \cdot [m \cdot (4-m) - 1 \cdot 3] =$$

$$= 4m - m^2 - 3 = -m^2 + 4m - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -m^2 + 4m - 3 \\ |A| = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -m^2 + 4m - 3 = 0 \\ m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \end{cases} \end{array}$$

Los únicos valores que provocan que la matriz A no tenga inversa son $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$, por lo tanto para el resto de valores sí tendrá inversa.

Solución:

La matriz A tendrá inversa si $|A| \neq 0$ que solo es posible $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

(b) Para $m = 0$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$X \cdot A - B^t = C$$

Pasaremos la matriz B^t al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X \cdot A - B^t = C \rightarrow X \cdot A = C + B^t$$

Como A se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$X \cdot A = C + B^t \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \rightarrow X = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, B^t, $C + B^t$ y posteriormente $\left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$.

La matriz A posee inversa porque según el apartado anterior nuestra $m \neq 1, 3$ y , por tanto para $m = 0$ el $|A| \neq 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso m, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$\lvert A\rvert = -m^2 + 4m - 3$ para $m = 0$	$\lvert A\rvert = -(0)^2 + 4 \cdot (0) - 3 = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & \frac{-4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos B^t y $C + B^t$

$$B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$C_{2x3} + B^t_{2x3} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 5+1 & -3+3 & 4+(-1) \\ -3+0 & -2+2 & 2+1 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Realizamos $(C + B^t) \cdot A^{-1}$ para obtener la matriz X.

> El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de un escalar k por una matriz A si posee dicha propiedad.
>
> $$k \cdot A = A \cdot k$$

$$X = (C + B^t) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6\cdot(-3)+0\cdot 12+3\cdot 0 & 6\cdot(-1)+0\cdot 4+3\cdot(-1) & 6\cdot 0+0\cdot(-3)+3\cdot 0 \\ -3\cdot(-3)+0\cdot 12+3\cdot 0 & -3\cdot(-1)+0\cdot 4+3\cdot(-1) & -3\cdot 0+0\cdot(-3)+3\cdot 0 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -18 & -9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2010. SUPLENTE JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) [1,25 puntos] Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.
b) [1,25 puntos] Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).

---

a) Para comprobar la igualdad dada necesitaremos calcular previamente $2 \cdot A$, A^2 y posteriormente $2 \cdot A - A^2$.

$$2 \cdot A_{3x3} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^2_{3x3} = A_{3x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) & -4 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 & -4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$2 \cdot A_{3x3} - A^2_{3x3} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$2 \cdot A_{3x3} - A^2_{3x3} = \begin{pmatrix} 10 - 9 & -8 - (-8) & 4 - 4 \\ 4 - 4 & -2 - (-3) & 2 - 2 \\ -8 - (-8) & 8 - 8 & -2 - (-3) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Solución:

La igualdad se cumple puesto que $2 \cdot A - A^2 = I$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Calcularemos A^{-1} tratando la igualdad dada en el apartado (a) como una ecuación matricial.

$$2A - A^2 = I$$

Para ello sacaremos factor común de la matriz A por la derecha.

$$2A - A^2 = I \rightarrow (2 \cdot I - A) \cdot A = I$$

Como la matriz A se encuentra multiplicando por la derecha del paréntesis, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}

$$(2 \cdot I - A) \cdot A = I \rightarrow (2 \cdot I - A) \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow (2 \cdot I - A) \cdot I = I \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad \begin{array}{l} (2 \cdot I - A) \cdot I = (2 \cdot I - A) \\ I \cdot A^{-1} = A^{-1} \end{array} \rightarrow A^{-1} = 2 \cdot I - A$$

La matriz A^{-1} es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$A^{-1} = 2 \cdot I - A$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $2 \cdot I$ y posteriormente $2 \cdot I - A$.

$$2 \cdot I_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $2 \cdot I - A$ para obtener la matriz A^{-1}.

$$A^{-1}_{3x3} = 2 \cdot I_3 - A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$A^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} 2-5 & 0-(-4) & 0-2 \\ 0-2 & 2-(-1) & 0-1 \\ 0-(-4) & 0-4 & 2-(-1) \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La inversa de matriz A es $A^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Calcula A^{-1}.

b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 + 0 \cdot 2 = -1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$ la matriz tiene inversa, obtenemos A^{-1} mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \qquad (1)$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 1 & (-1)^{1+2}\cdot 0 \\ (-1)^{2+1}\cdot 2 & (-1)^{2+2}\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

La inversa de la matriz A es$A^{-1}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot A^t = B + 2 \cdot I$$

Como A se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X \cdot A^t = B + 2 \cdot I \to A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \to I \cdot X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \to X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$$

Como A^t se encuentra multiplicando a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por $\left(A^t\right)^{-1}$.

$$X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \to X \cdot A^t \cdot \left(A^t\right)^{-1} = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

$$\text{Como } A^t \cdot \left(A^t\right)^{-1} = I \to X \cdot I = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \to X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}(calculada en el apartado (a)), $\left(A^t\right)^{-1}$, $2 \cdot I$, $B + 2 \cdot I$, $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$ y posteriormente $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$.

Por las propiedades de la matriz inversa sabemos que $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$,por tanto $\left(A^t\right)^{-1}$ es sencillamente hacer la traspuesta a A^{-1} que la tenemos calculada en el apartado anterior.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos $2 \cdot I$, $B + 2 \cdot I$ y $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$

$$2 \cdot I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B_{2x2} + 2 \cdot I_{2x2} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -3+2 & 0+0 \\ 2+0 & -1+2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

Realizamos $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$ para obtener la matriz X.

$$X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

2010. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) [0,5 puntos] Determina los valores de α para los que A tiene inversa.

(b) [1,25 puntos] Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$.

(c) [0,75 puntos] Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

(a) Calculamos $|A|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de α para los cuales no posee inversa.

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si $|A| = 0$, averiguaremos los valores de α para los cuales $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{\alpha} & 1-2\alpha & 3-3\alpha \\ \cancel{0} & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-2\alpha & 3-3\alpha \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 1 \cdot [(1-2\alpha)\cdot(\alpha) - 2\cdot(3-3\alpha)] =$$

$$= \alpha - 2\alpha^2 - 6 + 6\alpha = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6 \\ |A| = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0 \\ \alpha = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-6)}}{2\cdot(-2)} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{3}{2} \\ \alpha_2 = 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Los únicos valores que provocan que la matriz A no tenga inversa son $\alpha_1 = \dfrac{3}{2}$ y $\alpha_2 = 2$, por lo tanto para el resto de valores tendrá inversa.

Solución:

La matriz A tendrá inversa cuando $|A| \neq 0$ que solo es posible $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$.

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

(b) Para $\alpha = 1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A posee inversa porque según el apartado anterior nuestra $\alpha \neq \frac{3}{2}$ y 2 y , por tanto para $\alpha = 1$ el $|A| \neq 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

> $|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso m, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\ (A))^t \tag{1}$$

$\|A\| = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6$ para $\alpha = 1$	$\|A\| = -2 \cdot (1)^2 + 7 \cdot 1 - 6 = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to cof\ (A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\ (A) = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\ (A))^t = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

La inversa de la matriz A para $\alpha = 1$ es $A^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

Como A se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Realizamos A^{-1}(calculada en el apartado anterior) y posteriormente $A^{-1} \cdot B$, para obtener la matriz X.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$X = A^{-1}_{3x3} \cdot B_{3x1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{3x1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-2) + (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot 4 \\ 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ -2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}_{3x1}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x1} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}_{3x1}$

Este obra cuyo autor es Juan Blanco está bajo una licencia de Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional de Creative Commons.