Bloque 1: Matrices y Determinantes

Ecuaciones Matriciales 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [0,5 puntos] Indica los valores de m para los que A es invertible.
(b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B).

(a) Calculamos $|A|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de m para los cuales no posee inversa.

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si $|A| = 0$, averiguaremos los valores de m para los cuales $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3+C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & m & 3 \\ \cancel{4} & 1 & 4-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & 4-m \end{vmatrix} = 1 \cdot [m \cdot (4-m) - 1 \cdot 3] =$$

$$= 4m - m^2 - 3 = -m^2 + 4m - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -m^2 + 4m - 3 \\ |A| = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -m^2 + 4m - 3 = 0 \\ m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \end{cases} \end{array}$$

Los únicos valores que provocan que la matriz A no tenga inversa son $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$, por lo tanto para el resto de valores sí tendrá inversa.

Solución:

La matriz A tendrá inversa si $|A| \neq 0$ que solo es posible $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

(b) Para $m = 0$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$X \cdot A - B^t = C$$

Pasaremos la matriz B^t al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X \cdot A - B^t = C \rightarrow X \cdot A = C + B^t$$

Como A se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$X \cdot A = C + B^t \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \rightarrow X = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = \left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, B^t, $C + B^t$ y posteriormente $\left(C + B^t\right) \cdot A^{-1}$.

La matriz A posee inversa porque según el apartado anterior nuestra $m \neq 1, 3$ y , por tanto para $m = 0$ el $|A| \neq 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso m, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(cof\,(A)\right)^t \tag{1}$$

$\|A\| = -m^2 + 4m - 3$ para $m = 0$	$\|A\| = -(0)^2 + 4 \cdot (0) - 3 = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & \frac{-4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos B^t y $C + B^t$

$$B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \to B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$C_{2x3} + B^t_{2x3} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 5+1 & -3+3 & 4+(-1) \\ -3+0 & -2+2 & 2+1 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Realizamos $(C + B^t) \cdot A^{-1}$ para obtener la matriz X.

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pero el producto de un escalar k por una matriz A si posee dicha propiedad.

$$k \cdot A = A \cdot k$$

$$X = (C + B^t) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6\cdot(-3)+0\cdot 12+3\cdot 0 & 6\cdot(-1)+0\cdot 4+3\cdot(-1) & 6\cdot 0+0\cdot(-3)+3\cdot 0 \\ -3\cdot(-3)+0\cdot 12+3\cdot 0 & -3\cdot(-1)+0\cdot 4+3\cdot(-1) & -3\cdot 0+0\cdot(-3)+3\cdot 0 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -18 & -9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$.

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 3.

[2,5 puntos] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$.

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot B = C$$

Como B se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por B^{-1}.

$$A \cdot X \cdot B = C \rightarrow A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$$

$$\text{Como } B \cdot B^{-1} = I \rightarrow A \cdot X \cdot I = C \cdot B^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \quad \rightarrow \quad A \cdot X = C \cdot B^{-1}$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = C \cdot B^{-1} \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, B^{-1} y posteriormente $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Antes de nada comprobaremos ambas matrices tienen inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & -1 & -1 \\ \cancel{0} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-1)] = -1 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 1 & (-1)^{1+2} \cdot (-1) \\ (-1)^{2+1} \cdot 0 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera análoga repetimos el proceso para obtener B^{-1}.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(B) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\,(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(B))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot C$

$$A^{-1}_{2x2} \cdot C_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-2) \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ para obtener la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 & 3\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 0 & 3\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 & 3\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}_{2x3}$

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 3.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Calcula A^{-1}.
b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

---

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -1 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$ la matriz tiene inversa, obtenemos A^{-1} mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

Primero hallamos su matriz de cofactores o adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 1 & (-1)^{1+2} \cdot 0 \\ (-1)^{2+1} \cdot 2 & (-1)^{2+2} \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

La inversa de la matriz A es $A^{-1}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot A^t = B + 2 \cdot I$$

Como A se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X \cdot A^t = B + 2 \cdot I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \rightarrow I \cdot X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \rightarrow X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$$

Como A^t se encuentra multiplicando a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por $\left(A^t\right)^{-1}$.

$$X \cdot A^t = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \rightarrow X \cdot A^t \cdot \left(A^t\right)^{-1} = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

$$\text{Como } A^t \cdot \left(A^t\right)^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}(calculada en el apartado (a)), $\left(A^t\right)^{-1}$, $2 \cdot I$, $B + 2 \cdot I$, $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$ y posteriormente $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$.

Por las propiedades de la matriz inversa sabemos que $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$,por tanto $\left(A^t\right)^{-1}$ es sencillamente hacer la traspuesta a A^{-1} que la tenemos calculada en el apartado anterior.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Calculamos $2 \cdot I$, $B + 2 \cdot I$ y $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I)$

$$2 \cdot I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B_{2x2} + 2 \cdot I_{2x2} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -3+2 & 0+0 \\ 2+0 & -1+2 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1}$ para obtener la matriz X.

$$X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot I) \cdot \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$.