Bloque 6: Integrales Definidas

Regla de Barrow 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Calcula

$$\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$.

Esta integral la resolveremos aplicando un cambio de variable, es el método más adecuado porque en el mismo enunciado nos sugiere que apliquemos el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Integración por cambio de variable: $\int_a^b f'(u)\, u' dx$
i) Realizamos el cambio de variable y derivamos ambos términos.

$$t = u \to dt = u' dx$$

ii) Calculamos los nuevos valores de integración

$$\text{Para } u = b \to t = b$$
$$\text{Para } u = a \to t = a$$

iii) Sustituimos en la integral dada, resolvemos la nueva integral y aplicamos la regla de Barrow

$$\int_a^b f'(t)\, dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Despejamos la variable } x \text{ del cambio de variable sugerido} \\ t = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{elevando al cuadrado}]{\text{Despejamos } x} (t)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 ; t^2 = x \\ \text{Derivamos cada uno de los miembros de la igualdad} \\ \begin{array}{ccc} x & = & t^2 \\ \downarrow & \text{derivamos} & \downarrow \\ 1dx & = & 2 \cdot t\ dt \end{array} \\ \text{Calculamos los valores de integración para la nueva variable} \\ \text{Para } x = \pi^2 \to t = \sqrt{\pi^2} = \pi \\ \text{Para } x = 0 \to t = \sqrt{0} = 0 \\ \text{Sustituimos en la integral para obtener una más sencilla de resolver} \\ \int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx \xrightarrow[dx=2t\ dt]{t=\sqrt{x}} \int_0^{\pi} sen(t) \cdot 2t\ dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi} sen(t) \cdot 2t\ dt = \int_0^{\pi} 2t \cdot sen(t)\ dt = \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontremos el producto de dos funciones} \\ \text{resolvemos por método de integración por partes} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi} \overbrace{2t}^{u} \cdot \overbrace{sen\,(t)\ dt}^{dv} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes:} \\ \int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du \\ u = 2t \xrightarrow{\text{derivamos}} du = 2dt \\ dv = sen\,(t)\ dt \xrightarrow{\text{integramos}} \left\{ \begin{array}{l} v = \int sen\,(t)\ dt = \\ \quad = -cos\,(t) \end{array} \right. \end{array} \right] =$$

$$= \left[\overbrace{2t}^{u} \cdot \underbrace{(-cos\,(t))}_{v} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \overbrace{cos\,(t)}^{v} \cdot \underbrace{2\,dt}_{du} =$$

$$= [-2t \cdot cos\,(t)]_0^{\pi} - 2 \cdot \int_0^{\pi} cos\,(t)\ dt =$$

$$= [-2t \cdot cos\,(t) - 2 \cdot sen\,(t)]_0^{\pi} =$$

$$= (-2 \cdot \pi \cdot cos\,(\pi) - \cancel{2 \cdot sen\,(\pi)}) - (\cancel{-2 \cdot 0 \cdot cos\,(0)} - \cancel{2 \cdot sen\,(0)}) = -2 \cdot \pi \cdot (-1) = 2\pi$$

Integración por partes:

$$\int_a^b f\,(x) \cdot g\,(x)\,dx = \int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

i) Elegimos u como una de las dos funciones y el resto como dv, el orden de preferencia para elegir u es:
A(arcos) L(logaritmos) P(polinomios) E(exponenciales) S(senos, cosenos, tangentes, etc)

$$u = f\,(x) \text{ y } dv = g\,(x)\,dx$$

ii) Obtenemos du y v.

$$\begin{array}{ll} u = f\,(x) & du = f'\,(x) \cdot dx \\ dv = g\,(x) \cdot dx & v = \int g\,(x)\,dx \end{array}$$

iii) Aplicamos la expresión de integración por partes. Este proceso se puede repetir varias veces.

Solución:

La $\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\pi$.