Bloque 5: Integrales Indefinidas

Integración

por Cambio de Variable 2010

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

Sea $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$.

a) [1 punto] Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

b) [1,5 puntos] Determina I.

---

a) Aplicaremos el cambio de variable sugerido por el enunciado $t^2 = e^{-x}$.

Integración por cambio de variable: $\int f'(u)\,u'dx$

i) Realizamos el cambio de variable y derivamos ambos términos.

$$t = u \to dt = u'dx$$

ii) Sustituimos en la integral dada y resolvemos la nueva integral

$$\int f'(t)\,dt = f(t) + k$$

iii) Deshacemos el cambio de variable.

$$t = u \to f(u) + k$$

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Despejamos la variable } x \text{ del cambio de variable sugerido} \\ t^2 = e^{-x} \xrightarrow[\text{aplicando logaritmos}]{\text{Despejamos } x} \begin{array}{l} ln\left(e^{-x}\right) = ln\left(t^2\right);\ -x \cdot ln(e) = 2 \cdot ln(t) \\ \text{como } ln(e) = 1 \to x = -2 \cdot ln(t) \end{array} \\ \text{Derivamos cada uno de los miembros de la igualdad} \\ \begin{array}{ccc} x & = & -2 \cdot ln(t) \\ \downarrow & \text{derivamos} & \downarrow \\ 1dx & = & -2 \cdot \frac{1}{t}dt \end{array} \\ \text{Sustituimos en la integral para obtener una más sencilla de resolver} \\ \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx \xrightarrow[dx=-2\cdot\frac{1}{t}\,dt]{t^2=e^{-x}} \int \frac{5}{1+t} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{t}\right)\,dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{5}{1+t} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{t}\right)\,dt = \int \frac{-10}{t \cdot (t+1)}dt = -10 \cdot \int \frac{1}{t \cdot (t+1)}dt$$

Solución:

La integral dada expresada en función del cambio de variable $t^2 = e^{-x}$ es $I = -10 \cdot \int \frac{1}{t \cdot (t+1)}dt$.

b) Como ya la tenemos expresada en función del cambio de variable solamente debemos de resolverla, pero será más cómoda si usamos $\int \frac{-10}{t\cdot(t+1)}\,dt$.

$$I=\int \frac{-10}{t\cdot(t+1)}\,dt=\left[\begin{array}{c}\text{Integral tipo racional con el grado del denominador mayor}\\ \text{al del numerador, cuyo denominador se encuentra}\\ \text{factorizado, reescribimos la integral como suma de}\\ \text{tantas fracciones como factores tenga el denominador}\\ \int \frac{-10}{t\,(t+1)}\,dt=\int \frac{A}{t}\,dt+\int \frac{B}{(t+1)}\,dt\end{array}\right]=$$

$$=\int \frac{A}{t}\,dt+\int \frac{B}{(t+1)}\,dt=A\cdot\int \frac{1}{t}\,dt+B\cdot\int \frac{1}{(t+1)}\,dt=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Integral tipo logaritmica, el numerador}\\ \text{es la derivadad del denominador}\\ \int \frac{u'}{u}\,dx=ln\,|u|+k\end{array}\right]=A\cdot ln\,|t|+B\cdot ln\,|t+1|+k=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Calculamos las constantes } A \text{ y } B\\ \\ \frac{-10}{t\,(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(t+1)}\\ \\ \text{Tratamos la igualada como una ecuación, haciendo m.c.m para eliminar los denominadores}\\ \\ -10=A\cdot(t+1)+B\cdot(t)\\ \\ \text{Daremos valores a } t\text{, generalmente quellos que anulen el denominador para obtener } A \text{ y } B\\ \\ \text{si } t=0\rightarrow -10=A\cdot(0+1)+B\cdot(0)\rightarrow A=-10\\ \\ \text{si } t=-1\rightarrow -10=\cancel{A\cdot(-1+1)}+B\cdot(-1)\rightarrow B=10\end{array}\right]=$$

$$=-10\cdot ln\,|t|+10\cdot ln\,|t+1|+k=\left[\begin{array}{c}\text{Deshacemos cambio de variable}\\ t^2=e^{-x}\rightarrow t=\sqrt{e^{-x}}\end{array}\right]=$$

$$=-10\cdot ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right|+10\cdot ln\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right|+k=$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Este paso es opcional, podemos simplificar la expresión sacando factor común a 10} \\ \\ -10 \cdot ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| + 10 \cdot ln\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right| = 10 \cdot \left(ln\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right| - ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| \right) \end{array} \right] =$$

$$= 10 \cdot \left(ln\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right| - ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| \right) + k$$

Solución:

La $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\,dx = 10 \cdot \left(ln\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right| - ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| \right) + k.$