Bloque 5: Integrales Indefinidas

Cálculo de Primitivas 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. RESERVA A. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Sea $f:(-2.+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ln(x+2)$. Halla una primitiva de F de f que verifique $F(0)=0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

Sea $F(x)$ las infinitas primitivas de f, entonces:

$F(x)=\int f(x)\ dx=\int ln(x+2)\ dx$

Esta integral la resolveremos aplicando el método de integración por partes, a pesar de no encontrarnos a priori el producto de dos funciones, cuando nos enfrentamos a una integral en la que solamente aparezcan funciones del tipo:

i) Arcos: Arcotangentes, Arcocosenos y Arcosenos.
ii) Logaritmos

Resolveremos aplicando esta técnica, para ello elegiremos la variable u como una de las anteriores funciones (arcos o logaritmos) y tomando el resto de la integral, en nuestro caso dx, como dv.

Integración por partes:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx=\int u dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

i) Elegimos u como una de las dos funciones y el resto como dv, el orden de preferencia para elegir u es:
A(arcos) L(logaritmos) P(polinomios) E(exponenciales) S(senos, cosenos, tangentes, etc)

$$u=f(x) \text{ y } dv=g(x)\,dx$$

ii) Obtenemos du y v.

$$\begin{array}{ll} u=f(x) & du=f'(x)\cdot dx \\ dv=g(x)\cdot dx & v=\int g(x)\,dx \end{array}$$

iii) Aplicamos la expresión de integración por partes. Este proceso se puede repetir varias veces.

$$F(x)=\int \overbrace{ln(x+2)}^{u}\cdot\overbrace{dx}^{dv}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes:} \\ \int udv=u\cdot v-\int vdu \\ u=ln(x+2)\xrightarrow{\text{derivamos}} du=\dfrac{1}{x+2}dx \\ dv=dx \xrightarrow{\text{integramos}} v=\int dx=x \end{array}\right]=$$

$$=\overbrace{ln(x+2)}^{u}\cdot\underbrace{x}_{v}-\int\overbrace{x}^{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x+2}dx}_{du}=x\cdot ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}dx=$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{El grado del numerador es mayor o igual al del denominador} \\ \text{efectuamos la división entre ellas para reescribir la integral} \\ \\ \begin{array}{cc} D(x) & |d(x) \\ \cline{2-2} r(x) & c(x) \end{array} \rightarrow \int \frac{D(x)}{d(x)} dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{d(x)} dx \\ \\ \begin{array}{ccc} x & & |x+2 \\ \cline{3-3} \underline{-x} & \underline{-2} & 1 \\ & -2 & \end{array} \longrightarrow \int \frac{x}{x+2} dx = \int 1 \cdot dx + \int \frac{-2}{x+2} dx \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot ln\,(x+2) - \left[\int 1 \cdot dx + \int \frac{-2}{x+2} dx \right] = x \cdot ln\,(x+2) - \int dx + 2 \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales} \\ \text{inmediatas del tipo:} \\ \\ \int dx = x + k \\ \\ \int \frac{u'}{u} dx = ln\,|u| + k \end{array} \right] = x \cdot ln\,(x+2) - x + 2 \cdot ln\,|x+2| + k$$

Acabamos de obtener $F(x) = x \cdot ln\,(x+2) - x + 2 \cdot ln\,|x+2| + k$, pero no es la solución del ejercicio, porque nuestra primitiva depende de la constante k, que podrá tomar cualquier número real, así que no tenemos una primitiva si no tenemos infinitas, para determinar la que necesitamos debemos imponerle la condición indicadas en el enunciado $F(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{rc} F(x) = & x \cdot ln\,(x+2) - x + 2 \cdot ln\,|x+2| + k \\ F(0) = & 0 \cdot ln\,(0+2) - 0 + 2 \cdot ln\,|0+2| + k \\ F(0) = & 0 \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{c} 0 \cdot ln\,(0+2) - 0 + 2 \cdot ln\,|0+2| + k + k = 0 \\ 2 \cdot ln\,(2) + k = 0 \\ k = -2 \cdot ln\,(2) \end{array}$$

Solución:

La primitiva de f que verifica que $F(0) = 0$ es $F(x) = x \cdot ln\,(x+2) - x + 2 \cdot ln\,|x+2| - 2 \cdot ln\,(2)$

2010. RESERVA B. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Sea la función f dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$. Determina la primitiva de F de f tal que $F(1) = 1$.

Sea $F(x)$ las infinitas primitivas de f, entonces $F(x) = \int f(x)\,dx$, por tanto:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo racional con el grado del denominador mayor} \\ \text{al del numerador, factorizamos el denominador y reescribimos} \\ \text{la integral como suma de tantas fracciones como factores tenga} \\ \text{el denominador} \\ \\ x^2+x = x\cdot(x+1) \\ \\ \int \dfrac{1}{x^2+x}\,dx = \int \dfrac{1}{x\cdot(x+1)}\,dx = \int \dfrac{A}{x}\,dx + \int \dfrac{B}{x+1}\,dx \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx = A\cdot \int \frac{1}{x}\,dx + B\cdot \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo logaritmica, el numerador} \\ \text{es la derivadad del denominador} \\ \int \dfrac{u'}{u}\,dx = ln\,|u| + k \end{array}\right] = A\cdot ln\,|x| + B\cdot ln\,|x+1| + k =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Calculamos las constantes } A \text{ y } B \\ \\ \dfrac{1}{x\cdot(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} \\ \text{Tratamos la igualada como una ecuación, haciendo m.c.m para eliminar los denominadores} \\ \\ 1 = A\cdot(x+1) + B\cdot x \\ \text{Daremos valores a } x\text{, generalmente quellos que anulen el denominador para obtener } A \text{ y } B \\ \\ \text{si } x = -1 \to 1 = \cancel{A\cdot(-1+1)} + B\cdot(-1) \to B = -1 \\ \\ \text{si } x = 0 \to 1 = A\cdot(0+1) + \cancel{B\cdot(0)} \to A = 1 \end{array}\right] =$$

$$= ln\,|x| - ln\,|x+1| + k$$

Acabamos de obtener $F(x) = ln|x| - ln|x+1| + k$, pero no es la solución del ejercicio, porque nuestra primitiva depende de la constante k, que podrá tomar cualquier número real, así que no tenemos una primitiva si no infinitas, para determinar la que necesitamos debemos imponerle la condición indicada en el enunciado $F(1) = 1$.

$$\left.\begin{array}{rc} F(x) = & ln|x| - ln|x+1| + k \\ F(1) = & ln|1| - ln|1+1| + k \\ F(1) = & 1 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} ln|1| - ln|1+1| + k = 1 \\ 0 - ln(2) + k = 1 \\ k = 1 + ln(2) \end{array}$$

Solución:

La primitiva de f que verifica que $F(1) = 1$ es $F(x) = ln|x| - ln|x+1| + 1 + ln(2)$