Bloque 6: Integrales Definidas

Áreas

entre Gráficas 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. TITULAR JUNIO. OPCIÓN B. EJERCICIO 2.

Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida como $g(x) = \dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$.
a) [1 punto] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.
b) [1,5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

a) Calculamos sus puntos de corten entre ellas igualándolas entre sí.

> Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 5 - x \\ g(x) = \dfrac{4}{x} \end{array}\right| \rightarrow \; 5 - x = \frac{4}{x}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$5 - x = \frac{4}{x} \xrightarrow[\text{para quitar denominadores}]{\text{Mínimo común multiplo}} \frac{5x}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{4}{x}; \quad -x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+3}{-2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5-3}{-2} = 4 \end{cases}$$

Ahora que ya tenemos los valores de x los sustituimos en una de las dos gráficas para obtener su imagen (su coordenada en el eje de ordenadas).

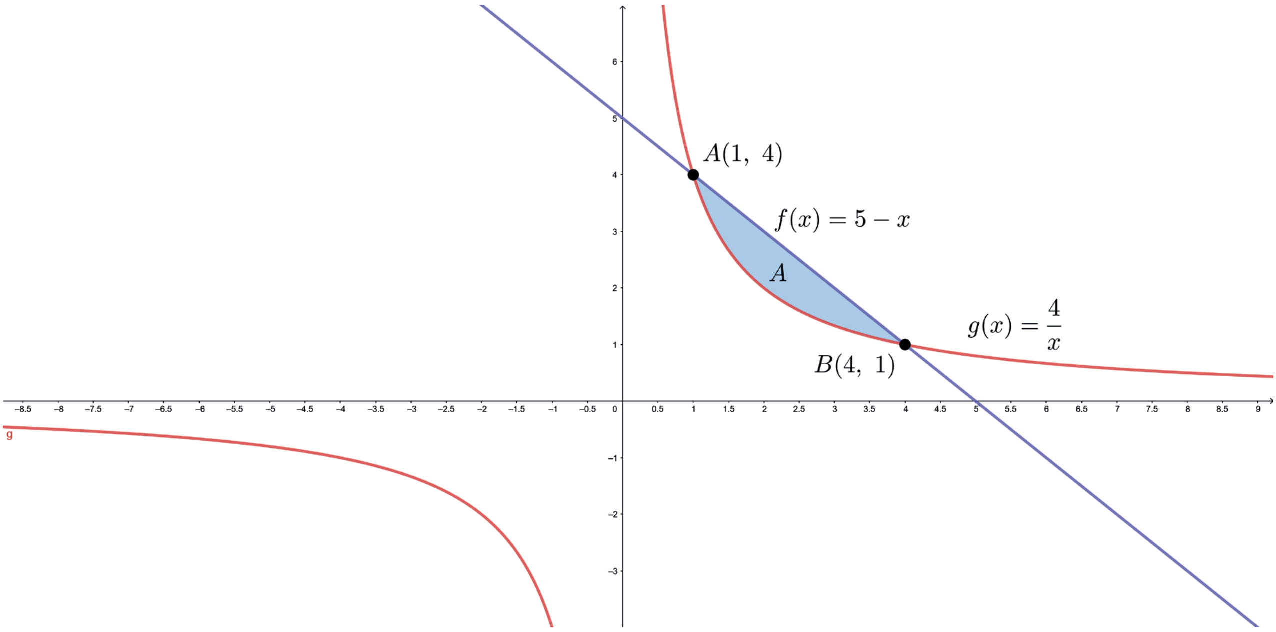
Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 5 - 1 = 4 \rightarrow A(1,\ 4)$

Para $x = 4 \rightarrow f(4) = 5 - 4 = 1 \rightarrow B(4,\ 1)$

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = 5 - x$ tenemos una función afín (una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas), cuya forma es $y = mx + n$, donde m nos indica la pendiente de la recta y n el punto de corte con el eje de ordenadas, datos que podemos usar para representarla pero para facilitarnos su representación al tratarse de una línea recta calcularemos dos puntos dándole los valores que queramos a la variable x, dichos puntos ya los tenemos calculados al ser los puntos de corte entre ambas gráficas.

Mientras que para $g(x) = \dfrac{4}{x}$ tenemos una hipérbola, si la reescribimos como $g(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{x}$ nos damos cuenta de que se trata de la función elemental $y = \dfrac{1}{x}$ pero multiplicada por 4, lo que significa es que tendrá la misma forma que la función elemental pero en cada uno de sus puntos la coordenada y se encontrará multiplicada por 4, es decir si la función elemental $y = \dfrac{1}{x}$ pasa por los puntos $(-1,\ -1)$ y $(1,\ 1)$ nuestra función $g(x) = \dfrac{4}{x}$ pasará por los puntos $(-1,\ -4)$ y $(1,\ 4)$, sin embargo dicha multiplicación no modifica sus asíntotas siendo su asíntota vertical la recta $x = 0$ y su asíntota horizontal $y = 0$.



b) Observando la representación anterior, la gráfica de f se encuentra siempre por encima de g durante todo el recinto, siendo los valores $x = 1$ y $x = 4$ nuestros límites de integración. Por lo tanto podemos definir el área pedida como

> El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.
>
> $$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_1^4 [f(x) - g(x)]\ dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)\ dx$$

Procedemos a calcular dicha integral para obtener el área pedida.

$$A = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una cosntante} \end{array} \right] = 5\int_1^4 dx - \int_1^4 x\, dx - 4\int_1^4 \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \\ \int dx = x + k \\ \\ \int \frac{1}{x} dx = ln\,|x| + k \end{array} \right] = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \cdot ln\,|x|\right]_1^4 =$$

$$= \left(5 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} - 4 \cdot ln\,|4|\right) - \left(5 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 4 \cdot ln\,|1|\right) = 20 - 8 - 4ln\,|4| - 5 + \frac{1}{2} + \cancel{4 \cdot 0} = \frac{15}{2} - 4ln\,|4|\ \ u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f y g es de $\frac{15}{2} - 4ln\,|4|\ \ u^2$.

2010. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 2.

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.
a) [0,75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas $x = 1$.
b) [1,75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcula su área.

---

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \qquad (1)$$

Calculamos $f(1)$, $f'(x)$ y posteriormente $f'(1)$.

$f(1) = 1^2 + 4 = 5$

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación de la recta tangente (1).

$y - 5 = 2 \cdot (x - 1)$ expresada en forma punto-pendiente.

A continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - 5 = 2 \cdot (x - 1)\,;\;\; y = 2x - 2 + 5 \to y = 2x + 3$

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ es $y = 2x + 3$.

b) Por el apartado anterior nos damos cuenta que la recta facilitada $y = 2x + 3$ coincide con la recta tangente anteriormente calculada por lo tanto no es necesario calcular el punto de corte entre ambas porque ya lo tenemos puesto que ambas pasan por el el punto $A(1,\ 5)$ (por este motivo el ejercicio no nos lo pide).

> Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = x^2 + 4$ sabemos que se trata de una parábola al ser un polinomio de orden 2, cuyo coeficiente que acompaña a la x^2 es positivo por lo tanto es convexa $(\cup)$, para esbozarla calcularemos su vértice y sus puntos de corte con los ejes (una manera alternativa de representarla es darse cuenta de que se trata de una traslación vertical de 4 unidades de la función elemental $y = x^2$).

- Vértice: $V\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.

  $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0 \to f(0) = 0^2 + 4 = 4 \to V(0,\ 4)$

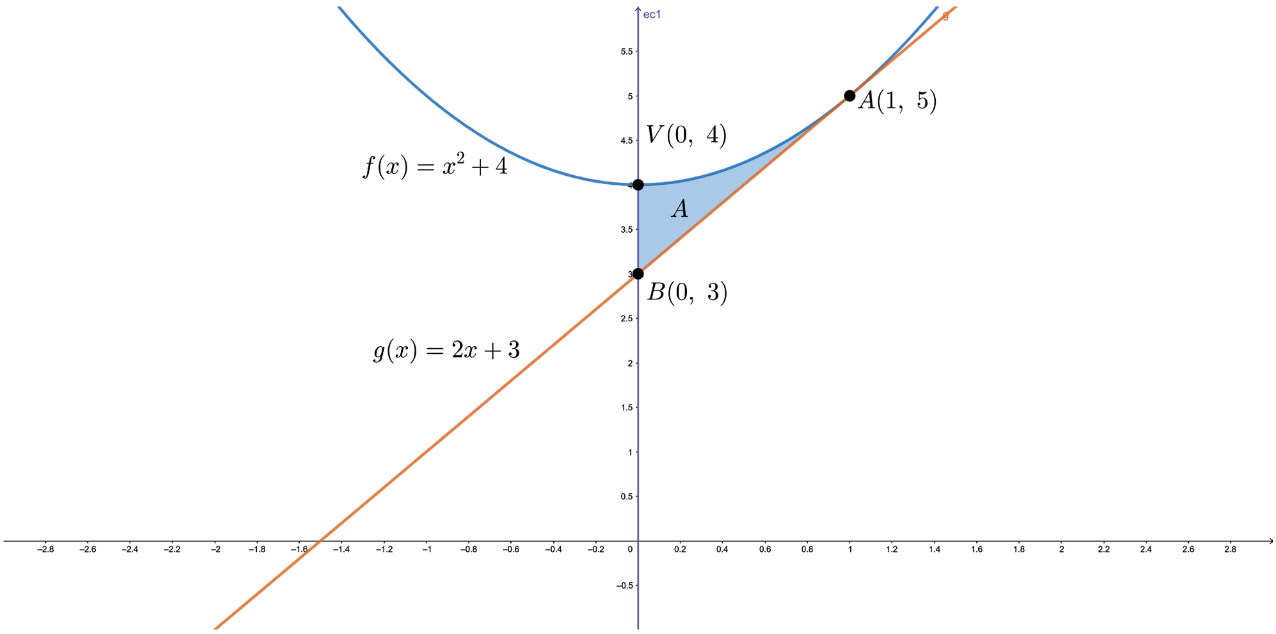
- Corte con el eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

  $x^2 + 4 = 0;\ \ x^2 = -4 \to x = \pm\sqrt{-4} \nexists \mathbb{R}$,al no obtener solución nos indica que no corta al eje OX.

- Corte con el eje OY: le imponemos la condición de que $x = 0$, sencillamente calculamos la imagen para dicho valor de x.

  $f(0) = 0^2 + 4 = 4 \to V(0,\ 4)$, coincide con el vértice calculado anteriormente.

Mientras que para $y = 2x + 3$ tenemos una función afín (una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas), cuya forma es $y = mx = b$, donde m nos indica la pendiente de la recta y n el punto de corte con el eje de ordenadas $(0,\ n)$, es decir sabemos que pasa por el punto $(0,\ 3)$, como para representar una recta necesitamos dos puntos, solo necesitamos uno más que es el $A(1,\ 5)$ por lo expuesto al principio del apartado.



Observando la representación anterior, la gráfica de f se encuentra siempre por encima de g durante todo el recinto, siendo los valores $x = 0$ y $x = 1$ nuestros límites de integración. Por lo tanto podemos definir el área pedida como

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\ dx = \int_0^1 \left[x^2 + 4 - (2x+3)\right]\ dx$$

Procedemos a calcular dicha integral para obtener el área pedida.

$$A = \int_0^1 \left[x^2 + 4 - (2x+3)\right]\ dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right)\ dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes propiedades de las integrales:} \\ \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx,\ \text{siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] = \int_0^1 x^2\, dx - 2\int_0^1 x\, dx + \int_0^1\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \\ \int dx = x + k \end{array}\right] = \left[\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot\frac{0^2}{2} + 0\right) = \frac{1}{3} - 1 + 1 - 0 = \frac{1}{3}\, u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f e $y = 2x + 3$ es de $\frac{1}{3}\, u^2$.

2010. SUPLENTE JUNIO A. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$.
a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismo ejes coordenados.
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

---

a) Para poder representarlas nuestro primer paso es convertir la función en valor absoluto en una función a trozos, al tratarse de una función tan sencilla solo debemos de aplicar la definición de valor absoluto.

$$g(x) = |x| = \begin{cases} -x & si\ \ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

A continuación calcularemos los puntos de corte entre ellas igualándolas entre sí.

Para $x < 0$, tendremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2 - x^2 \\ g(x) = -x \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} 2 - x^2 = -x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

Para convertir una función en valor absoluto a trozos haremos los siguientes pasos:

- i) Igualaremos a cero la función sin el valor absoluto y calcularemos sus raíces.
- ii) Estudiaremos el signo del contenido del valor absoluto.
- iii) Definimos la función a trozos usando las raíces para crear el dominio de cada uno de los trozos y los intervalos donde el signo nos salga negativo cambiamos el signo a la función.

El dominio de una función con valor absoluto siempre coincide con el dominio de esa misma función sin valor absoluto.

Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones. Al ser una de ellas una función a trozos debemos de igualar cada uno de los trozos a la otra función, rechazando las soluciones que no se encuentren en su dominio.

De las dos soluciones obtenidas $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$, solo se acepta $x = -1$ al ser la única que verifica la condición $x < 0$. Ahora sustituimos en cualquiera de las dos gráficas para obtener su imagen (coordenada en el eje de ordenadas).

Para $x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 - (-1)^2 = 1 \rightarrow A(-1,\ 1)$

Mientras que para $x \geq 0$, tendremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2 - x^2 \\ g(x) = x \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} 2 - x^2 = x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$, solo se acepta $x = 1$ al ser la única que verifica la condición $x \geq 0$. Ahora sustituimos en cualquiera de las dos gráficas para obtener su imagen (coordenada en el eje de ordenadas).

Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 2 - 1^2 = 1 \rightarrow B(1,\ 1)$

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = 2 - x^2$ sabemos que se trata de una parábola al ser un polinomio de orden 2, cuyo coeficiente que acompaña a la x^2 es negativo por lo tanto es cóncava ($\cap$), para esbozarla calcularemos su vértice y sus puntos de corte con los ejes (una manera alternativa de representarla es darse cuenta de que se trata de una simetría con respecto del eje OX y una traslación vertical de 2 unidades de la función elemental $y = x^2$).

- Vértice: $V\left(\dfrac{-b}{2a},\ f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.

  $$\frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0 \rightarrow f(0) = 2 - 0^2 = 2 \rightarrow V(0,\ 2)$$

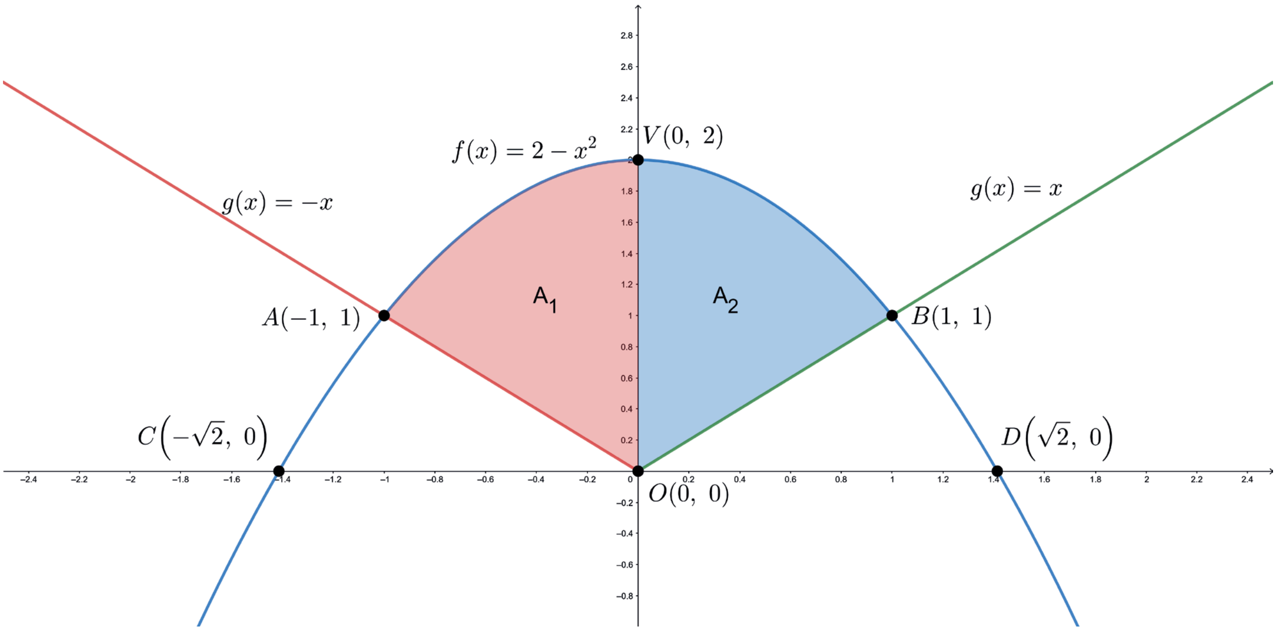
- Corte con el eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

  $2 - x^2 = 0;\ \ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} C\left(-\sqrt{2},\ 0\right) \\ D\left(\sqrt{2},\ 0\right) \end{cases}$ al obtener solución nos indica que corta al eje OX.

- Corte con el eje OY: le imponemos la condición de que $x = 0$, sencillamente calculamos la imagen para dicho valor de x.

  $f(0) = 2 - 0^2 = 2 \rightarrow V(0,\ 2)$, coincide con el vértice calculado anteriormente.

Mientras que para $g(x) = \begin{cases} -x & si \;\; x < 0 \\ x & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$ sabemos que se trata de una función a trozos compuesto por dos funciones lineales que son exactamente los bisectores del primer y segundo cuadrante, para representarlas al ser funciones lineales sabemos que pasan por el origen de coordenadas $O(0,\ 0)$ y por los puntos de corte $A(-1,\ 1)$ y $B(1,\ 1)$ hallados anteriormente.



b) Observando la representación anterior, nos percatamos que debemos de dividir el área entre las gráficas en dos regiones distintas, en ambas regiones la la gráfica de f se encuentra siempre por encima de g. Siendo la expresión del área

$$A_t = A_1 + A_2 \tag{1}$$

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left[2 - x^2 - (-x)\right]\ dx \ \text{ y } A_2 = \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right)\ dx$$

Sin embargo nos podemos dar cuenta de que el área pedida esta compuesta por dos regiones que son simétricas respecto de la recta $x = 0$, en consecuencia su valor numérico será el mismo, es decir $A_1 = A_2$, pudiendo definir el área de la siguiente forma

$$A_t = 2 \cdot A_2 = 2 \cdot \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right)\ dx$$

Procedemos a calcular dicha integral para obtener el área pedida.

$$A_t = 2 \cdot \int_0^1 \left[2 - x^2 - x\right]\ dx = 2 \cdot \int_0^1 \left(-x^2 - x + 2\right)\ dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] = 2 \cdot \left[-\int_0^1 x^2\, dx - \int_0^1 x\, dx + 2\int_0^1\ dx\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \\ \int dx = x + k \end{array}\right] = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left(-\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0\right)\right] = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 0\right) = \frac{7}{3}\, u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f y g es de $\frac{7}{3}\, u^2$.

2010. SUPLENTE JUNIO A. OPCIÓN B. EJERCICIO 2.

Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = lnx$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:
a) [0,75 puntos] Comprueba que la recta de ecuación $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.
b) [1,75 puntos] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta normal del apartado a).

---

a) Para comprobar que $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto $x = e$ nos basta con calcular su recta normal y verificar que son iguales. La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $x = e$ tiene la siguiente expresión:

$$y - f(e) = -\frac{1}{f'(e)} \cdot (x - e) \tag{1}$$

Calculamos $f(e)$, $f'(x)$ y posteriormente $f'(e)$.

$f(e) = ln(e) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(e) = \frac{1}{e}$

Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación de la recta normal (1).

$y - 1 = -\frac{1}{e} \cdot (x - e)$ expresada en forma punto-pendiente.

A continuación la reescribiremos para expresarla en forma explícita.

$y - 1 = -\frac{1}{\frac{1}{e}} \cdot (x - e)\,;\;\; y = -e \cdot (x - e) + 1 \to y = -ex + e^2 + 1$

Solución:

Al coincidir ambas rectas podemos afirmar que $y = -ex + e^2 + 1$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto $x = e$.

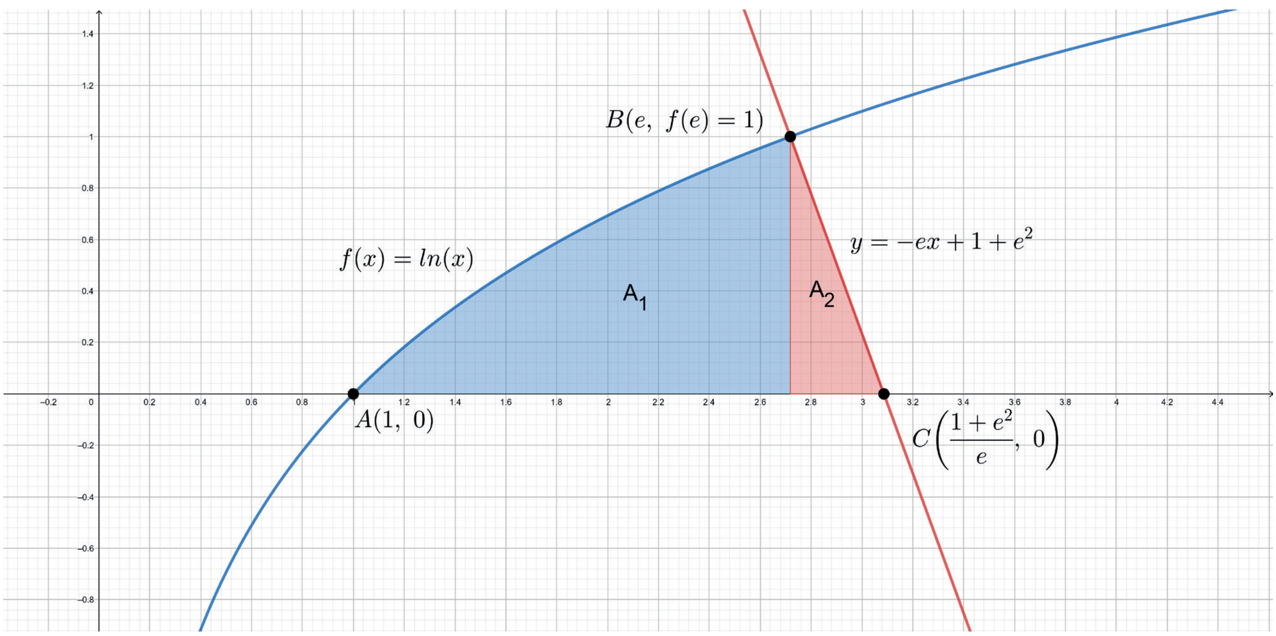
b) Para poder calcular el área pedida previamente realizaremos un esbozo de la región.

La gráfica $f(x) = ln(x)$ es una función elemental que nos sabemos de memoria, cuyas características más importantes son que posee una asíntota vertical en $x = 0$, que es siempre creciente y pasa por el punto $A(1,\ 0)$.

Mientras que para $y = -ex + 1 + e^2$ sabemos por el apartado anterior que es la recta normal a la gráfica de f en el punto $x = e$ y que pasa por el punto $B(e,\ f(e) = 1)$, al tratarse de una recta afín (línea recta que no pasa por el origen de coordenadas) para su representación es necesario disponer de dos puntos, al tener el punto anteriormente expuesto solo necesitamos un punto más que será por ejemplo el corte con el eje OX (que usaremos más adelante al ser uno de los límites de integración).

- Corte Eje OX: imponemos la condición de que $y = 0$.

$$-ex + 1 + e^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1+e^2}{e} \rightarrow C\left(\frac{1+e^2}{e},\ 0\right)$$



Observando la representación anterior, nos percatamos que debemos de dividir el área entre las gráficas propuestas en dos regiones. Siendo la expresión del área.

$$A_t = A_1 + A_2 \qquad (2)$$

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A_1 = \int_1^e [ln(x) - 0]\ dx \text{ y } A_2 = \int_e^{\frac{1+e^2}{e}} \left(-ex + 1 + e^2 - 0\right)\ dx$$

Procedemos a calcular cada una de las integrales para obtener el área pedida.

$A_1 = \int_1^e [ln(x) - 0]\ dx = \int_1^e ln(x)\ dx =$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes:} \\ \int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v du \\ u = ln(x) \xrightarrow{\text{derivamos}} \left\{ du = \frac{1}{x} dx \right. \\ dv = dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \int dx = x \end{array} \right] =$$

$$= \left[\overbrace{ln(x)}^{u} \cdot \underbrace{x}_{v} \right]_1^e - \int_1^e \overbrace{x}^{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{du} = [x \cdot ln(x)]_1^e - \int_1^e dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante la sigueinte} \\ \text{integral inmediata:} \\ \\ \int dx = x + k \end{array} \right] = [x \cdot ln(x) - x]_1^e =$$

$$= (e \cdot ln(e) - e) - (1 \cdot ln(1) - 1) = e - e + 1 = 1\ u^2$$

$$A_2 = \int_e^{\frac{1+e^2}{e}} \left(-ex + 1 + e^2 - 0\right)\ dx = \int_e^{\frac{1+e^2}{e}} \left(-ex + 1 + e^2\right)\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una cosntante} \end{array} \right] = -e \int_e^{\frac{1+e^2}{e}} x\, dx + \int_e^{\frac{1+e^2}{e}} dx + e^2 \int_e^{\frac{1+e^2}{e}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \\ \int dx = x + k \end{array} \right] = \left[-e \cdot \frac{x^2}{2} + x + e^2 \cdot x \right]_e^{\frac{1+e^2}{e}} =$$

$$= \left(-e \cdot \frac{\left(\dfrac{1+e^2}{e} \right)^2}{2} + \left(\frac{1+e^2}{e} \right) + e^2 \cdot \left(\frac{1+e^2}{e} \right) \right) - \left(-e \cdot \frac{(e)^2}{2} + (e) + e^2 \cdot (e) \right) =$$

$$= -\frac{\cancel{e} \dfrac{\left(1+e^2\right)^2}{e^{\cancel{2}}}}{2} + \frac{1+e^2}{e} + \frac{e^{\cancel{2}} \cdot \left(1+e^2\right)}{\cancel{e}} + \frac{e^3}{2} - e - e^3 =$$

$$= -\frac{\left(1+e^2\right)^2}{2e} + \frac{1+e^2}{e} + e \cdot \left(1+e^2\right) + \frac{e^3}{2} - e - e^3 =$$

$$= -\frac{1+e^4+2e^2}{2e} + \frac{1+e^2}{e} \cancel{+e} \cancel{+e^3} + \frac{e^3}{2} \cancel{-e} \cancel{-e^3} =$$

$$= \frac{-\left(1+e^4+2e^2\right) + 2 \cdot \left(1+e^2\right) + e \cdot e^3}{2e} =$$

$$= \frac{-1 \cancel{-e^4} \cancel{-2e} + 2 \cancel{+2e^2} \cancel{+e^4}}{2e} = \frac{1}{2e} \, u^2$$

Sustituimos los resultado del $A_1 = 1 \, u^2$ y $A_2 = \dfrac{1}{2e} \, u^2$ en la expresión (2) para obtener el área pedida.

$$A_t = 1 + \frac{1}{2e} \, u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f, $y = -ex + 1 + e^2$ y el eje de abscisas es de $1 + \dfrac{1}{2e} \, u^2$.

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 4}$ para $x \neq 1$ y $x \neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 3$.

Para la resolución de este ejercicio no es necesario la realización de un boceto de la gráfica de f, puesto que nos facilitan directamente los límites de integración que son la propias rectas $x = 2$ y $x = 3$, sin embargo debemos de estudiar el comportamiento de la función $f(x)$ entre dichas rectas, para determinar si entre dichos valores se encuentra siempre por encima, por debajo o cruza el eje de abscisas (eje OX), así podremos saber a la hora de definir la integral si es la función menos el eje de abscisas, el eje de abscisas menos la función o si debemos de dividir el área en varias regiones, para ello estudiaremos el signo de la función.

> Estudiar el signo de una función consiste en ver en qué intervalos su gráfica se encuentra por encima o por debajo del eje de abscisas (eje OX). Para su estudio realizaremos los siguientes pasos:
>
> - Calcular el punto de corte con el eje de abscisas (eje OX).
> - Determinar las asíntotas verticales.
> - Comprobar el signo de la función en cada uno de los intervalos, calculando la imagen de un punto cualquiera de dichos intervalos.
>   - Si es positivo la función se encuentra por encima del eje de abscisas.
>   - Si es negativo la función se encuentra por debajo del eje de abscisas.

i) Corte con el eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

$\dfrac{3}{x^2 - 5x + 4} = 0$, al tratarse de una función racional solo debemos de igualar a cero el numerador.

$3 \neq 0$, al no obtener solución nos indica que no corta al eje OX.

ii) Determinamos las asíntotas verticales, al tratarse de una función racional compuesta del cociente de dos polinomios donde los valores que anulan al denominador $x = 1$ y $x = 4$ (nos lo indica el propio enunciado) no anulan al numerador, sabemos que dichos valores son las propias asíntotas verticales.

iii) Estudiamos el signo de la función, incorporando las asíntotas verticales y los puntos de corte con el eje OX (en este caso concreto no tenemos puntos de corte con el eje OX).

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de $f(x)$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$

Observando el signo de la función nos damos cuenta que durante el intervalo comprendido entre 2 y 3 el signo de $f(x) < 0$ y por lo tanto en dicha región se encuentra por debajo del eje de abscisas (eje OX).

El área pedida es la región definida por las curvas $f(x) = \frac{3}{x^2-5x+4}$, eje de abscisas $y = 0$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$ que serán nuestros límites de integración, por lo tanto podemos definir el área como.

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_2^3 [0 - f(x)]\ dx = \int_2^3 \left(0 - \frac{3}{x^2-5x+4}\right)\ dx =$$

$$= \int_2^3 \frac{-3}{x^2-5x+4} dx = \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo racional con el grado del denominador mayor} \\ \text{al del numerador, factorizamos el denominador y reescribimos} \\ \text{la integral como suma de tantas fracciones como factores tenga} \\ \text{el denominador} \\ \\ x^2-5x+4=0 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(1)\cdot(4)}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{5+3}{2} = 4 \end{cases} \\ \\ \int_2^3 \frac{-3}{x^2-5x+4} dx = \int_2^3 \frac{-3}{(x-1)\cdot(x-4)} dx = \int_2^3 \frac{A}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{B}{x-4} dx \end{array}\right] =$$

$$= \int_2^3 \frac{A}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{B}{x-4} dx = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos la siguiente} \\ \text{propiedad de las integrales:} \\ \\ \int a\cdot f(x)\ dx = a\cdot\int f(x)\ dx,\ \text{siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] =$$

$$= A\cdot\int_2^3 \frac{1}{x-1} dx + B\cdot\int_2^3 \frac{1}{x-4} dx = \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo logaritmica, el numerador} \\ \text{es la derivadad del denominador} \\ \int \frac{u'}{u} dx = ln\,|u| + k \end{array}\right] =$$

$$= [A\cdot ln\,|x-1| + B\cdot ln\,|x-4|]_2^3 =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Calculamos las constantes } A \text{ y } B \\ \\ \dfrac{-3}{(x-1)\cdot(x-4)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-4} \\ \\ \text{Tratamos la igualada como una ecuación, haciendo m.c.m para eliminar los denominadores} \\ \\ -3 = A\cdot(x-4) + B\cdot(x-1) \\ \\ \text{Daremos valores a } x\text{, generalmente quellos que anulen el denominador para obtener } A \text{ y } B \\ \\ \text{si } x=1 \rightarrow -3 = A\cdot(1-4) + \cancel{B\cdot(1-1)} \rightarrow A = 1 \\ \\ \text{si } x=4 \rightarrow -3 = \cancel{A\cdot(4-4)} + B\cdot(4-1) \rightarrow B = -1 \end{array} \right] =$$

$$= [ln\,|x-1| - ln\,|x-4|]_2^3 = (ln\,|3-1| - ln\,|3-4|) - (ln\,|2-1| - ln\,|2-4|) =$$

$$= (ln\,|2| - ln\,|-1|) - (ln\,|1| - ln\,|-2|) = ln\,(2) - ln\,(1) - ln\,(1) + ln\,(2) =$$

$$= ln\,(2) - 0 - 0 + ln\,(2) = 2ln\,(2)\ \ u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 2, = 3$ es de $2ln\,(2)\ \ u^2$.

2010. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCIÓN B. EJERCICIO 2.

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\,|2 - x|$.

a) [1 punto] Esboza su gráfica.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$.

---

a) Para poder esbozarla nuestro primer paso es convertir la función en valor absoluto en una función a trozos.

$$|2-x| \equiv \begin{cases} -(2-x) & \text{si} \quad 2-x \leq 0 \\ 2-x & \text{si} \quad 2-x > 0 \end{cases}$$

i) Calculamos las raíces de $2 - x$.

$2 - x = 0 \to x = 2$

ii) Estudiamos el signo de $2 - x$.

Intervalos	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $2-x$	$2-x>0$	$2-x<0$

Para convertir una función en valor absoluto a trozos haremos los siguientes pasos:

- i) Igualaremos a cero la función sin el valor absoluto y calcularemos sus raíces.
- ii) Estudiaremos el signo del contenido del valor absoluto.
- iii) Definimos la función a trozos usando las raíces para crear el dominio de cada uno de los trozos y los intervalos donde el signo nos salga negativo cambiaremos el signo a la función.

El dominio de una función con valor absoluto siempre coincide con el dominio de esa misma función sin valor absoluto.

iii) Convertimos el valor absoluto en una función a trozos.

$$|2-x| \equiv \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \to |2-x| \equiv \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -2+x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Ahora que ya tenemos $|2-x| \equiv \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -2+x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ reescribimos la gráfica de $f(x)$.

$$f(x) \equiv \begin{cases} x\cdot(2-x) & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x\cdot(-2+x) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \to f(x) \equiv \begin{cases} -x^2+2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para esbozar la gráfica de $f(x) \equiv \begin{cases} -x^2+2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ sabemos que se trata de una función a trozos que es continua en todo $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de una función continua es siempre continua y el producto entre funciones continuas siempre es una función continua, observando detenidamente nos damos cuenta de que se trata de dos parábolas (ambas son polinomios de orden 2) que son iguales pero multiplicadas por -1, significando que son simétricas respecto del eje de abscisas (Eje OX), es decir serán exactamente iguales pero con valores de la coordenadas Y cambiados de signo, por lo tanto solo es necesario para su representación calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes de una de ellas (puesto que la otra será su simétrica), nosotros usaremos $g(x) = -x^2+2x$.

- Vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

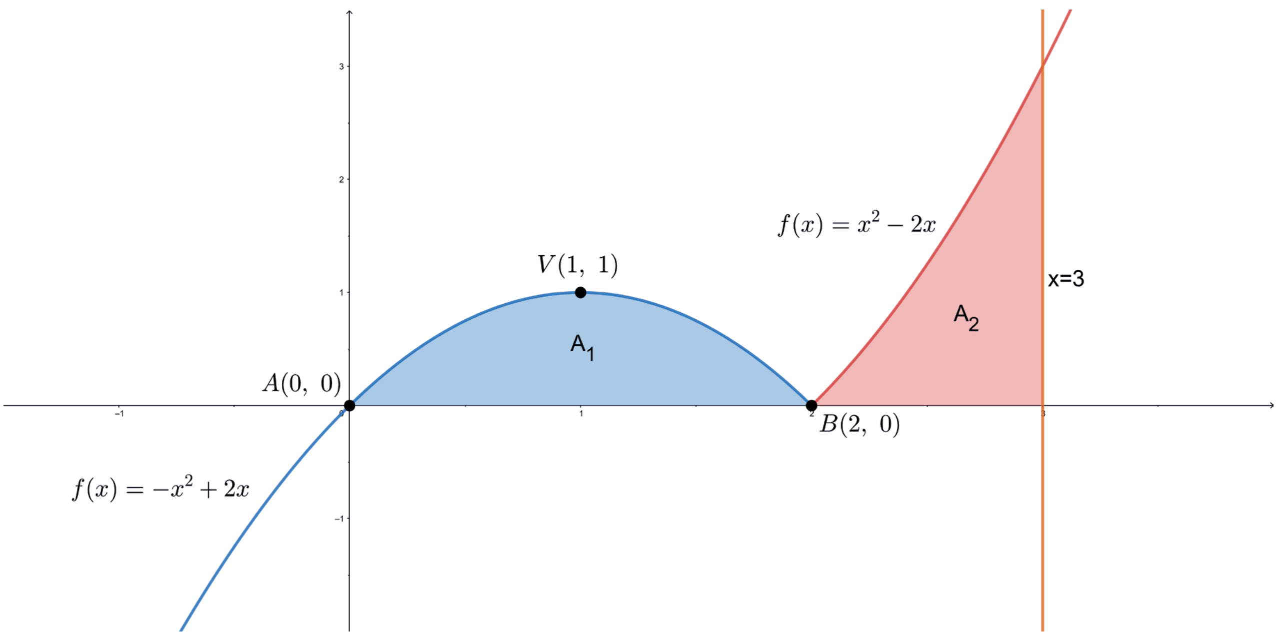
  $\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1 \rightarrow g(1) = -(1)^2 + 2\cdot 1 = 1 \rightarrow V(1,\ 1)$

- Corte con el eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

  $-x^2+2x = 0;\ \ x\cdot(-x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0,\ 0) \\ -x+2 = 0;\ \ x_2 = 2 \rightarrow B(2,\ 0) \end{cases}$

- Corte con el eje OY: le imponemos la condición de que $x = 0$, sencillamente calculamos la imagen para dicho valor de x.

  $g(0) = -0^2 + 2\cdot 0 = 0 \rightarrow A(0,\ 0)$, coincide con el punto A (no era necesario calcularlo, porque si obtenemos el punto $(0,\ 0)$ en el corte con el eje OX siempre coincidirá con el corte con el eje OY).



b) Observando la representación anterior, nos percatamos que debemos de dividir el área entre las gráficas en dos regiones distintas, en ambas regiones la gráfica de f se encuentra siempre por encima del eje de abscisas (Eje OX) $y = 0$, donde las rectas $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$ serán nuestros límites de integración. Siendo la expresión del área

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.

$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

$$A_t = A_1 + A_2 \qquad (1)$$

$$A_1 = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x - 0\right)\ dx \ \text{ y } A_2 = \int_2^3 \left(x^2 - 2x - 0\right)\ dx$$

Procedemos a calcular cada una de las integrales para obtener el área pedida.

$A_1 = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x - 0\right)\ dx = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)\ dx$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes propiedades de las integrales:} \\ \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] = -\int_0^2 x^2\, dx + 2 \cdot \int_0^2 x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante la integral inmediata:} \\ \\ \int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \end{array}\right] = \left[-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2\right) = -\frac{8}{3} + 4 - 0 = \frac{4}{3}\, u^2$$

$A_2 = \int_2^3 \left(x^2 - 2x - 0\right)\ dx = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right)\ dx$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes propiedades de las integrales:} \\ \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] = \int_2^3 x^2\, dx - 2 \cdot \int_2^3 x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante la integral inmediata:} \\ \\ \int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \end{array} \right] = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}\, u^2$$

Sustituimos los resultados $A_1 = \dfrac{4}{3}\, u^2$ y $A_2 = \dfrac{4}{3}\, u^2$ en la expresión (1) para obtener el área pedida.

$$A_t = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\, u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = 3$ es de $\dfrac{8}{3}\, u^2$.

2010. RESERVA B. OPCIÓN B. EJERCICIO 2.

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g, y halla su punto de corte.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

---

a) Calculamos sus puntos de corten entre ellas igualándolas entre sí.

> Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 3 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{array}\right| \to \; x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \xrightarrow[\text{para quitar denominadores}]{\text{Mínimo común multiplo}} \frac{2x^2}{2} - \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{2}; \; 2x^2 - 4x + 6 = x^2 + 2$$

$$2x^2 - x^2 - 4x + 6 - 2 = 0; \;\; x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \;\; (\text{doble})$$

Ahora que ya tenemos el único valor de x lo sustituimos en una de las dos gráficas para obtener su imagen (su coordenada en el eje de ordenadas).

Para $x = 2 \to f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3 \to A(2, \; 3)$

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sabemos que se trata de una parábola al ser un polinomio de orden 2, cuyo coeficiente que acompaña a la x^2 es positivo por lo tanto es convexa ($\cup$), para esbozarla calcularemos su vértice y sus puntos de corte con los ejes.

- Vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, \; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

  $$\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1 \to f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2 \to V(1, \; 2)$$

- Corte con el eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

  $x^2 - 2x + 3 = 0$

  $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \nexists \mathbb{R}$, al no obtener solución no corta al eje OX.

- Corte con el eje OY: le imponemos la condición de que $x = 0$, sencillamente calculamos la imagen para dicho valor de x.

  $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow B(0,\ 3)$

Como $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ también se trata de una parábola convexa, calculamos su vértice y puntos de corte con los ejes para representarla.

- Vértice: $V\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.

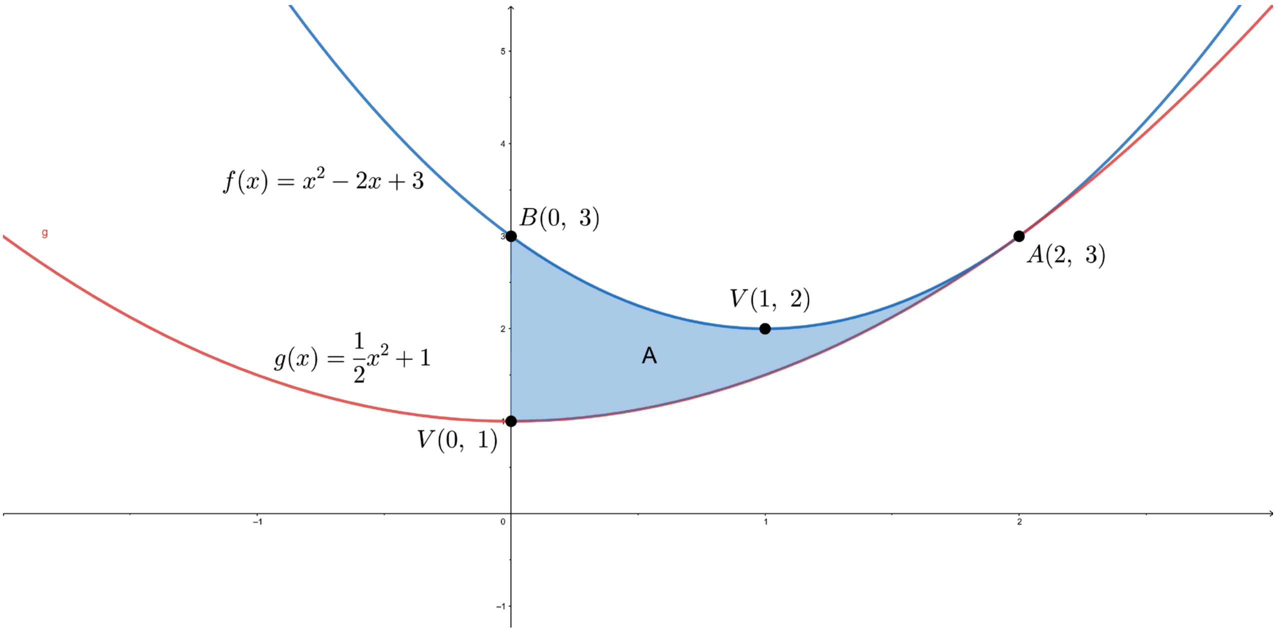
  $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = 0 \rightarrow g(0) = \dfrac{1}{2} \cdot 0^2 + 1 = 1 \rightarrow V(0,\ 1)$

- Corte con el eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

  $\dfrac{1}{2}x^2 + 1 = 0;\ \ x^2 = -1 \cdot 2;\ \ x^2 = -2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \nexists \mathbb{R}$, al no obtener solución no corta al eje OX.

- Corte con el eje OY: le imponemos la condición de que $x = 0$, sencillamente calculamos la imagen para dicho valor de x.

  $g(0) = \dfrac{1}{2} \cdot 0^2 + 1 = 1 \rightarrow V(0,\ 1)$, coincide con el vértice calculado anteriormente.



b) Observando la representación anterior, la gráfica de f se encuentra siempre por encima de g durante todo el recinto, siendo los valores $x = 0$ y $x = 2$ nuestros límites de integración. Por lo tanto podemos definir el área pedida como

> El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.
>
> $$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\ dx = \int_0^2 \left[x^2 - 2x + 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\right]\ dx$$

Procedemos a calcular dicha integral para obtener el área pedida.

$$A = \int_0^2 \left[x^2 - 2x + 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\right]\ dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right)\ dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes propiedades de las integrales:} \\ \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx,\ \text{siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\, dx - 2\int_0^2 x\, dx + 2\int_0^2\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \\ \int dx = x + k \end{array}\right] = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{6} - 2^2 + 2\cdot 2\right) - \left(\frac{0^3}{6} - 0^2 + 2\cdot 0\right) = \frac{4}{3} - 4 + 4 - 0 = \frac{4}{3}\,u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f, g y el eje de ordenadas es de $\frac{4}{3}\,u^2$.