Bloque 6: Integrales Definidas

Áreas

con Parámetros 2010

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2010. RESERVA A. OPCIÓN B. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

Realizaremos una representación de ambas funciones, para ello en primer lugar calcularemos los puntos de corte entre ellas (así será más fácil realizar el boceto de ambas gráficas y tendremos los límites de integración).

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + ax \\ y + x = 0;\;\; y = -x \rightarrow g(x) = -x \end{array}\right| \rightarrow \quad x^2 + ax = -x$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$x^2 + ax = -x;\;\; x^2 + ax + x = 0;\; \xrightarrow[\text{a la variable } x]{\text{Sacamos factor común}} x \cdot (x + a + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + a + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -a - 1 \end{cases}$$

Ahora que ya tenemos los valores de x los sustituimos en una de las dos gráficas para obtener su imagen (coordenada en el eje de ordenadas).

Para $x = 0 \rightarrow g(0) = -0 = 0 \rightarrow A(0,\, 0)$

Para $x = -a - 1 \rightarrow g(-a-1) = -(-a-1) = a + 1 \rightarrow B(-a-1,\, a+1)$

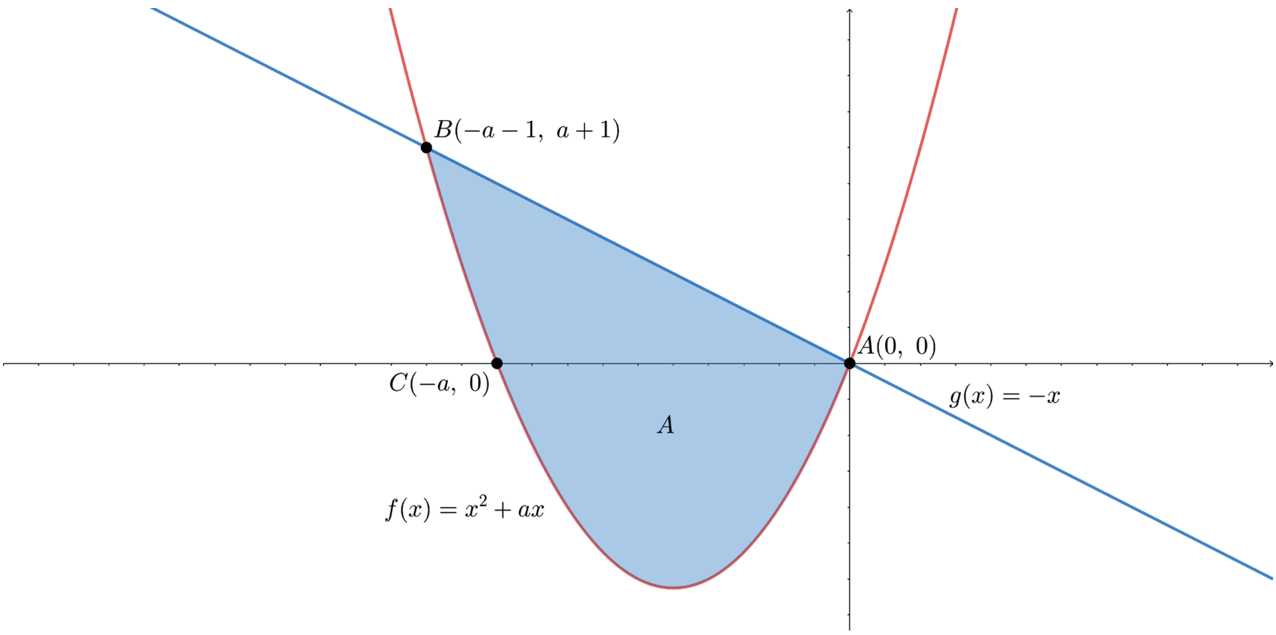
En segundo lugar analizaremos las funciones dadas para poder esbozar el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = x^2 + ax$, sabemos que se trata de una parábola por ser un polinomio de orden 2, cuyo coeficiente que acompaña a la x^2 es positiva por tanto es convexa $(\cup)$, para esbozarla solamente necesitaremos sus puntos de corte con el eje OX.

- Corte eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

$$x^2 + ax = 0 \xrightarrow[\text{a la variable } x]{\text{Sacamos factor común}} x \cdot (x + a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0,\, 0) \\ x + a = 0 \rightarrow x_2 = -a \rightarrow C(-a,\, 0) \end{cases}$$

Mientras que para $g(x) = -x$ tenemos una función lineal (línea recta que pasa por el origen de coordenadas), que es decreciente porque el término que acompaña a la x es negativo. Solo necesitaríamos dos puntos para su representación que ya los tenemos pues son los puntos de corte entre ambas gráficas.



Observando la representación anterior, la gráfica de g se encuentra siempre por encima de f en el intervalo de la región, siendo el área comprendida entre ellas 36 u^2,encontrándose definida por las curvas $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = -x$ y siendo $x = -a-1$ y $x = 0$ nuestros límites de integración. Por lo tanto podemos definir el área mediante la siguiente expresión.

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define inferiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_{-a-1}^{0} [g(x) - f(x)]\ dx = \int_{-a-1}^{0} \left[-x - \left(x^2 + ax\right)\right]\ dx = \int_{-a-1}^{0} \left(-x^2 - ax - x\right)\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes propiedades de las integrales:} \\ \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una constante} \end{array}\right] =$$

$$= -\int_{-a-1}^{0} x^2\,dx - a\int_{-a-1}^{0} x\,dx - \int_{-a-1}^{0} x\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{Nos encontramos ante la integral inmediata:}\\ \\ \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k\end{array}\right] =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - a\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_{-a-1}^{0} = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2+x^2}{2}\right]_{-a-1}^{0} =$$

$$= \left(-\frac{(0)^3}{3} - \frac{a\cdot(0)^2+(0)^2}{2}\right) - \left(-\frac{(-a-1)^3}{3} - \frac{a\cdot(-a-1)^2+(-a-1)^2}{2}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Resolvemos la siguiente igualda notable}\\ \\ (-a-b)^3 = (-a-b)^2\cdot(-a-b)\\ \\ (-a-1)^3 = (-a-1)^2\cdot(-a-1) = \left(a^2+1+2a\right)\cdot(-a-1) =\\ \\ = -a^3-a^2-a-1-2a^2-2a = -a^3-3a^2-3a-1\end{array}\right] =$$

$$= 0 - \left(-\frac{-a^3-3a^2-3a-1}{3} - \frac{a\cdot\left(a^2+1+2a\right)+a^2+1+2a}{2}\right) =$$

$$= \frac{-a^3-3a^2-3a-1}{3} + \frac{a^3+a+2a^2+a^2+1+2a}{2} =$$

$$= \frac{-a^3-3a^2-3a-1}{3} + \frac{a^3+3a^2+3a+1}{2} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(-a^3-3a^2-3a-1\right)+3\cdot\left(a^3+3a^2+3a+1\right)}{6} =$$

$$= \frac{-2a^3-6a^2-6a-2+3a^3+9a^2+9a+3}{6} =$$

$$= \frac{a^3+3a^2+3a+1}{6}\,u^2$$

Imponemos la condición de que el área del recinto limitada por ambas gráficas es de 36 u^2 para obtener la siguiente ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{a^3+3a^2+3a+1}{6}\,u^2 \\ A = 36\,u^2 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} \dfrac{a^3+3a^2+3a+1}{6} = 36 \\ a^3+3a^2+3a-215=0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida $a^3+3a^2+3a-215=0$ para determinar el valor del parámetro a.

$a^3+3a^2+3a-215=0$, resolvemos por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 3 & -215 \\ 5 & & 5 & 40 & 215 \\ \hline & 1 & 8 & 43 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow (a-5)\cdot\left(a^2+8a+43\right)=0 \\ a-5=0 \rightarrow a_1=5 \\ a^2+8a+43=0 \end{array}$$

A continuación resolvemos $a^2+8a+43=0$.

$$a^2+8a+43=0 \rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 43}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{-108}}{2\cdot 1} = \nexists \mathbb{R}$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f y g valdrá 36 u^2 si $a=5$ bajo la premisa que $a>0$.