Bloque 6: Integrales Definidas

Regla de Barrow 2019

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2019. RESERVA A. OPCION B. EJERCICIO 2.

Sea $f:(1,\ e)\to\mathbb{R}$ una función continua y sea F la primitiva de f que cumple $F(0)=\frac{\pi}{3}$ y $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi$.

Calcula:

(a) [1 punto] $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3f(x)-cos(x)\right)\ dx$

(b) [1,5 puntos] $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\left(F(x)\right)f(x)\ dx$

(a)

El segundo teorema fundamental del cálculo integral o conocido habitualmente como regla de Barrow nos dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\ dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3f(x)-cos(x)\right)\ dx$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Aplicamos las siguientes}\\ \text{propiedades de las integrales:}\\ \int(u\pm v)\ dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx\\ \\ \int a\cdot f(x)\ dx=a\cdot\int f(x)\ dx,\\ \text{siendo } a \text{ una constante}\end{array}\right]=$$

$$=3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\ dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos(x)\ dx=\left[\begin{array}{c}\text{Integral tipo logaritmica, el numerador}\\ \text{es la derivadad del denominador}\\ F(x)=\int f(x)\ dx\\ \int cos(x)\ dx=sen(x)+k\end{array}\right]=$$

$$=3\cdot\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\left[sen(x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=3\cdot\left[F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)\right]-\left[sen\left(\frac{\pi}{6}\right)-sen(0)\right]=$$

$$=3\cdot\left[\pi-\frac{\pi}{3}\right]-\left[\frac{1}{2}-0\right]=3\pi-\cancel{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{3}}-\frac{1}{2}=2\pi-\frac{1}{2}$$

Solución:

La $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3f(x)-cos(x)\right)\ dx=2\pi-\frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\left(F\left(x\right)\right) f\left(x\right)\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos la siguiente integral:} \\ \int sen\left(u\right) \cdot u'\ dx = -cos\left(u\right) + k \end{array}\right] =$

$$= \left[-cos\left(F\left(x\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -cos\left(F\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \left(-cos\left(F\left(0\right)\right)\right) = -cos\left(\pi\right) - \left(-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= -\left(-1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Una forma alternativa de resolver la integral de este aparatado, sería usando un cambio de variable, eligiendo $t = F\left(x\right)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\left(F\left(x\right)\right) f\left(x\right)\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Derivamos cada uno de los miembros de la igualdad} \\ \begin{array}{ccc} t & = & F\left(x\right) \\ \downarrow & \text{derivamos} & \downarrow \\ 1\,dt & = & f\left(x\right)\ dx \end{array} \\ \text{Calculamos los valores de integración para la nueva variable} \\ \text{Para } x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi \\ \text{Para } x = 0 \rightarrow t = F\left(0\right) = \frac{\pi}{3} \\ \text{Sustituimos en la integral para obtener una más sencilla de resolver} \\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\left(F\left(x\right)\right) f\left(x\right)\ dx \xrightarrow[dt=f(x)\ dx]{t=F(x)} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} sen\left(t\right)\ dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} sen\left(t\right)\ dt = \left[-cos\left(t\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -cos\left(\pi\right) - \left(-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\left(-1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Solución:

La $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\left(F\left(x\right)\right) f\left(x\right)\ dx = \frac{3}{2}$