Bloque 5: Integrales Indefinidas

Integración por Partes 2019

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

TABLA DE CONTENIDO

2019. SUPLENTE JUNIO. OPCION A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Calcula $\int ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Esta integral la resolveremos aplicando el método de integración por partes, a pesar de no encontrarnos a priori el producto de dos funciones, cuando nos enfrentamos a una integral en la que solamente aparezcan funciones del tipo:

i) Arcos: Arcotangentes, Arcocosenos y Arcosenos.
ii) Logaritmos

Resolveremos aplicando esta técnica, para ello elegiremos la variable u como una de las anteriores funciones (arcos o logaritmos) y tomando el resto de la integral, en nuestro caso dx, como dv.

Integración por partes:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int udv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

i) Elegimos u como una de las dos funciones y el resto como dv, el orden de preferencia para elegir u es:
A(arcos) L(logaritmos) P(polinomios) E(exponenciales) S(senos, cosenos, tangentes, etc)

$$u = f(x) \text{ y } dv = g(x)\,dx$$

ii) Obtenemos du y v.

$$\begin{array}{ll} u = f(x) & du = f'(x)\cdot dx \\ dv = g(x)\cdot dx & v = \int g(x)\,dx \end{array}$$

iii) Aplicamos la expresión de integración por partes. Este proceso se puede repetir varias veces.

$$\int \overbrace{ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}^{u}\overbrace{dx}^{dv} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes:} \\ \int udv = u\cdot v - \int vdu \\ u = ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \xrightarrow{\text{derivamos}} \left\{\begin{array}{l} du = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}\cdot\frac{(2x)\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2}dx = \\ = \frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}dx = \\ = \frac{x(x^2-1)}{x^2\cdot(x^2+1)}dx = \frac{x^2-1}{x\cdot(x^2+1)}dx \end{array}\right. \\ dv = dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= \overbrace{ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}^{u}\cdot\underbrace{x}_{v} - \int \overbrace{x}^{v}\cdot\underbrace{\frac{x^2-1}{x\cdot(x^2+1)}dx}_{du} =$$

$$= x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{El grado del numerador es mayor o igual al del denominador} \\ \text{efectuamos la división entre ellas para reescribir la integral} \\ \\ \begin{array}{cc} D(x) & |d(x) \\ r(x) & c(x) \end{array} \rightarrow \int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{d(x)}dx \\ \\ \begin{array}{ccc} x^2 & -1 & |x^2+1 \\ -x^2 & -1 & 1 \\ & -2 & \end{array} \longrightarrow \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int 1 \cdot dx + \int \frac{-2}{x^2+1}\,dx \end{array}\right] =$$

$$= x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \left[\int 1 \cdot dx + \int \frac{-2}{x^2+1}\,dx\right] = x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int 1 \cdot dx - \int \frac{-2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int dx - (-2)\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int dx = x + k \text{ y } \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctg(x) + k \end{array}\right] = x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - x + 2arctg(x) + k$$

Solución:

La $\int ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\,dx = x \cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - x + 2arctg(x) + k$

Aunque hemos terminado, en la siguiente página planteamos otra manera de resolverla.

Una forma alternativa de resolver esta integral es aplicando propiedades de los logaritmos para obtener dos integrales más sencillas.

$$\int ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx = \left[\begin{array}{c}\text{Usamos la siguiente propiedad}\\ ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)\end{array}\right] = \overbrace{\int ln\left(x^2+1\right)\,dx}^{I_1} - \overbrace{\int ln(x)\,dx}^{I_2}$$

Resolvemos las integrales I_1 e I_2 por separado, aplicando el método de integración por partes (explicado al principio del ejercicio):

$$I_1 = \int \overbrace{ln\left(x^2+1\right)}^{u}\,\overbrace{dx}^{dv} = \left[\begin{array}{l}\text{Integración por partes:}\\ \int udv = u\cdot v - \int vdu\\ u = ln\left(x^2+1\right) \xrightarrow{\text{derivamos}} \left\{\begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x\,dx = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x\,dx \\ = \dfrac{2x}{x^2+1}dx \end{array}\right.\\ dv = dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \int dx = x\end{array}\right] =$$

$$= \overbrace{ln\left(x^2+1\right)}^{u}\cdot\underbrace{x}_{v} - \int\overbrace{x}^{v}\cdot\underbrace{\frac{2x^2}{x^2+1}dx}_{du} = x\cdot ln\left(x^2+1\right) - \int\frac{2x^2}{x^2+1}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{El grado del numerador es mayor o igual al del denominador}\\ \text{efectuamos la división entre ellas para reescribir la integral}\\ \begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \hline r(x) & c(x)\end{array} \rightarrow \int\frac{D(x)}{d(x)}dx = \int c(x)\,dx + \int\frac{r(x)}{d(x)}dx \\ \begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2+1 \\ \hline \underline{-2x^2 \quad -2} & 2 \\ -2 & \end{array} \longrightarrow \int\frac{2x^2}{x^2+1}dx = \int 2\cdot dx + \int\frac{-2}{x^2+1}dx\end{array}\right] =$$

$$= x\cdot ln\left(x^2+1\right) - \left[\int 2\cdot dx + \int\frac{-2}{x^2+1}dx\right] = x\cdot ln\left(x^2+1\right) - 2\cdot\int dx + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= x\cdot ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2arctg(x) + k_1$$

$$I_2 = \int\overbrace{ln(x)}^{u}\,\overbrace{dx}^{dv} = \left[\begin{array}{l}\text{Integración por partes:}\\ \int udv = u\cdot v - \int vdu\\ u = ln(x) \xrightarrow{\text{derivamos}} du = \dfrac{1}{x}dx\\ dv = dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \int dx = x\end{array}\right] = \overbrace{ln(x)}^{u}\cdot\underbrace{x}_{v} - \int\overbrace{x}^{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} =$$

$$= xln(x) - \int\frac{x}{x}dx = xln(x) - \int 1\,dx = xln(x) - \int dx = xln(x) - x + k_2$$

Por tanto:

$$\int ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\ dx = I_1+I_2 = x\cdot ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctg\left(x\right)+k_1-\left[xln\left(x\right)-x+k_2\right]=$$

$$= x\cdot ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctg\left(x\right)-xln\left(x\right)+x+k=$$

$$= x\cdot ln\left(x^2+1\right)-xln\left(x\right)-x+2arctg\left(x\right)+k$$

Aunque parezca que no hemos obtenido la misma solución, si la reescribimos sacando factor común y usando propiedades de los logaritmos llegaremos al resultado anterior (estos pasos no son obligatorios, sencillamente los realizo para que veáis que hemos llegado al mismo resultado por otro camino).

$$\int ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\ dx = x\cdot ln\left(x^2+1\right)-xln\left(x\right)-x+2arctg\left(x\right)+k = \left[\begin{array}{c}\text{Sacamos factor común a la}\\ x\text{ que multiplica a los logaritmos}\\ a\cdot b\pm a\cdot c = a\cdot\left(b\pm c\right)\end{array}\right]=$$

$$= x\cdot\left[ln\left(x^2+1\right)-ln\left(x\right)\right]-x+2arctg\left(x\right)+k = \left[\begin{array}{c}\text{Usamos la siguiente propiedad}\\ ln\left(a\right)-ln\left(b\right)=ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\end{array}\right]=$$

$$= x\cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)-x+2arctg\left(x\right)+k$$

Solución:

La $\int ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\ dx = x\cdot ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)-x+2arctg\left(x\right)+k$