Bloque 5: Integrales Indefinidas

Cálculo de Primitivas 2019

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2019. TITULAR JUNIO. OPCIÓN A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Considera la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,\ 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Sea $F(x)$ las infinitas primitivas de f, entonces $F(x) = \int f(x)\,dx$, por tanto:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$$

Esta integral la resolveremos aplicando un cambio de variable, es el método más adecuado porque en el mismo anunciado nos sugiere que apliquemos el cambio de variable $t = e^x$.

Integración por cambio de variable: $\int f'(u)\,u'dx$
i) Realizamos el cambio de variable y derivamos ambos términos.

$$t = u \to dt = u'dx$$

ii) Sustituimos en la integral dada y resolvemos la nueva integral

$$\int f'(t)\,dt = f(t) + k$$

iii) Deshacemos el cambio de variable.

$$t = u \to f(u) + k$$

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Despejamos la variable } x \text{ del cambio de variable sugerido} \\ e^x = t \xrightarrow[\text{Aplicando logaritmos}]{\text{Despejamos } x} \begin{array}{l} ln\left(e^x\right) = ln\left(t\right);\ x \cdot ln\left(e\right) = ln\left(t\right) \\ \text{como } ln\left(e\right) = 1 \to x = ln\left(t\right) \end{array} \\ \text{Derivamos cada uno de los miembros de la igualdad} \\ \begin{array}{ccc} x & = & ln\left(t\right) \\ \downarrow & \text{derivamos} & \downarrow \\ 1dx & = & \dfrac{1}{t}\,dt \end{array} \\ \text{Sustituimos en la integral para obtener una más sencilla de resolver} \\ \int \dfrac{1+e^x}{1-e^x}\,dx \xrightarrow[dx=\frac{1}{t}\,dt]{e^x=t} \int \dfrac{1+t}{1-t}\cdot\dfrac{1}{t}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{1+t}{t\,(1-t)}\,dt = \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo racional con el grado del denominador mayor} \\ \text{al del numerador, cuyo denominador se encuentra} \\ \text{factorizado, reescribimos la integral como suma de} \\ \text{tantas fracciones como factores tenga el denominador} \\ \int \dfrac{1+t}{t\,(1-t)}\,dt = \int \dfrac{A}{t}\,dt + \int \dfrac{B}{(1-t)}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{A}{t}\,dt + \int \frac{B}{(1-t)}\,dt = A \cdot \int \frac{1}{t}\,dt + B \cdot \int \frac{1}{(1-t)}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo logaritmica, el numerador} \\ \text{es la derivada del denominador} \\ \int \frac{u'}{u}\, dx = ln\,|u| + k \end{array} \right] = A \cdot \int \frac{1}{t}\, dt + B \cdot \int \frac{1}{(1-t)} \cdot \frac{-1}{-1}\, dt =$$

$$= A \cdot \int \frac{1}{t}\, dt + B \cdot \frac{1}{-1} \int \frac{-1}{(1-t)}\, dt = A \cdot ln\,|t| - B \cdot ln\,|1-t| + k =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Deshacemos cambio de variable} \\ t = e^x \end{array} \right] = A \cdot ln\,|e^x| - B \cdot ln\,|1-e^x| + k =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos propiedades de los logaritmos} \\ \text{para simplificar la expresión} \\ \\ ln\left(a^b\right) = b \cdot ln\,(a) \;\; y \; log_a\,(a) = 1 \\ \\ ln\,(e^x) = x \cdot ln\,(e) = x \cdot 1 = x \end{array} \right] = A \cdot x - B \cdot ln\,|1-e^x| + k =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Calculamos las constantes } A \text{ y } B \\ \dfrac{1+t}{t\,(1-t)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{(1-t)} \\ \text{Tratamos la igualada como una ecuación, haciendo} \\ \text{m.c.m para eliminar los denominadores} \\ 1+t = A \cdot (1-t) + B \cdot (t) \\ \text{Daremos valores a } t\text{, generalmente quellos que} \\ \text{anulen el denominador para obtener } A \text{ y } B \\ \text{si } t = 0 \to 1+0 = A \cdot (1-0) + \cancel{B \cdot (0)} \to A = 1 \\ \\ \text{si } t = 1 \to 1+1 = \cancel{A \cdot (1-1)} + B \cdot (1) \to B = 2 \end{array} \right] = 1 - 2 \cdot ln\,|1-e^x| + k$$

Acabamos de obtener $F(x) = 1 - 2 \cdot ln\left|1 - e^x\right| + k$, pero no es la solución del ejercicio, porque nuestra primitiva depende de la constante k, que podrá tomar cualquier número real, así que no tenemos una primitiva si no tenemos infinitas, para determinar la que necesitamos debemos imponerle la condición indicada en el enunciado de que para de que pase por el punto $(1, 1)$.

Si la primitiva de f pasa por el punto (a, b) quiere decir que $F(a) = b$, así obtendremos una ecuación para determinar la constante k.

$$\left.\begin{array}{rl} F(x) = & 1 - 2 \cdot ln\left|1 - e^x\right| + k \\ F(1) = & 1 - 2 \cdot ln\left|1 - e^1\right| + k \\ F(1) = & 1 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} 1 - 2 \cdot ln\left|1 - e^1\right| + k = 1 \\ k = 1 - 1 + 2 \cdot ln\left|1 - e\right| \\ k = 2 \cdot ln(e - 1) \end{array}$$

Solución:

La primitiva de f que pasa por el punto $(1, 1)$ es $F(x) = 1 - 2 \cdot ln(1 - e^x) + 2 \cdot ln(e - 1)$

2019. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCION A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

Sea $f(x)$ las infinitas primitivas de f', entonces $f(x) = \int f'(x)\ dx$, por lo tanto:

$$f(x) = \int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \int ln(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Integración por partes:} \\ \int udv = u \cdot v - \int vdu \\ u = ln(x) \xrightarrow{\text{derivamos}} du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \end{array} \right] =$$

$$= ln(x) \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos porpiedades de potencias} \\ \text{para simplificar la integral} \\ \sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}} \text{ y } \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \end{array} \right] =$$

$$= ln(x) \cdot 2\sqrt{x} - \int 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= ln(x) \cdot 2\sqrt{x} - \int 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx =$$

$$= ln(x) \cdot 2\sqrt{x} - \int 2 \cdot x^{1-\frac{1}{2}}\ dx =$$

Integración por partes:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int udv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

i) Elegimos u como una de las dos funciones y el resto como dv, el orden de preferencia para elegir u es:
A(arcos) L(logaritmos) P(polinomios) E(exponenciales) S(senos, cosenos, tangentes, etc)

$$u = f(x) \text{ y } dv = g(x)\, dx$$

ii) Obtenemos du y v.

$$\begin{array}{cc} u = f(x) & du = f'(x) \cdot dx \\ dv = g(x) \cdot dx & v = \int g(x)\, dx \end{array}$$

iii) Aplicamos la expresión de integración por partes. Este proceso se puede repetir varias veces.

$$= ln\left(x\right)\cdot 2\sqrt{x} - 2\cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = ln\left(x\right)\cdot 2\sqrt{x} - 2\cdot \int \sqrt{x}\,dx =$$

$$= ln\left(x\right)\cdot 2\sqrt{x} - 2\cdot 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}\cdot ln\left(x\right) - 4\sqrt{x} + k$$

Las infinitas primitivas son $f\left(x\right) = 2\sqrt{x}\cdot ln\left(x\right) - 4\sqrt{x} + k$, al depender de la constante k. Para determinar la pedida le imponemos la condición del enunciado de que pase por el punto $(1,0)$.

Si la primitiva de f pasa por el punto (a,b) quiere decir que $f\left(a\right) = b$, así obtendremos una ecuación para determinar la constante k.

$$\left.\begin{array}{rc} f\left(x\right) = & 2\sqrt{x}\cdot ln\left(x\right) - 4\sqrt{x} + k \\ f\left(1\right) = & 2\sqrt{1}\cdot ln\left(1\right) - 4\sqrt{1} + k \\ f\left(1\right) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} 2\sqrt{1}\cdot ln\left(1\right) - 4\sqrt{1} + k = 0 \\ 2\cdot 0 - 4 + k = 0 \\ k = 4 \end{array}$$

Solución:

La primitiva de f que pasa por el punto $(1,0)$ es $f\left(x\right) = 2\sqrt{x}\cdot ln\left(x\right) - 4\sqrt{x} + 4$

2019. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCION A. EJERCICIO 2.

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$ para $x \neq 1,\ -1$.
a) [2 puntos] Halla todas las funciones primitivas de f.
b) [0,5 puntos] Calcula la primitiva que pasa por $(2,\ 0)$.

---

a) Sea $F(x)$ las infinitas primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = \int f(x)\,dx$, por lo tanto:

$$F(x) = \int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{El grado del numerador es mayor o igual al del denominador} \\ \text{efectuamos la división entre ellas para reescribir la integral} \\ \begin{array}{cc} D(x) & \underline{|d(x)} \\ r(x) & c(x) \end{array} \rightarrow \int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{d(x)}dx \\ \begin{array}{lll} x^4 & & \underline{|x^2-1} \\ \underline{-x^4} & \underline{+x^2} & x^2+1 \\ & x^2 & \\ & \underline{-x^2} & \underline{+1} \\ & & 1 \end{array} \longrightarrow \int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx = \int \left(x^2+1\right)\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx \end{array} \right] =$$

$$= \int \left(x^2+1\right)\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos la siguiente propiedad} \\ \text{de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \end{array} \right] =$$

$$= \int x^2\,dx + \int dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Reescribimos la tercera integral} \\ \text{factorizandola} \\ x^2-1 = (x+1)(x-1) \end{array} \right] =$$

$$= \int x^2\,dx + \int dx + \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Integral tipo racional con el grado del denominador mayor} \\ \text{al del numerador, cuyo denominador se encuentra} \\ \text{factorizado, reescribimos la integral como suma de} \\ \text{tantas fracciones como factores tenga el denominador} \\ \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx \end{array} \right] =$$

$$= \int x^2\,dx + \int dx + \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Nos encontramos ante integrales}\\ \text{inmediatas del tipo:}\\ \int dx = x + k\\ \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k\\ \int \dfrac{u'}{u}\,dx = ln\,|u| + k\end{array}\right] = \frac{x^3}{3} + x + Aln\,|x+1| + Bln\,|x-1| + k =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Calculamos las constantes } A \text{ y } B\\ \dfrac{1}{(x+1)\,(x-1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1}\\ \text{Tratamos la igualada como una ecuación, haciendo}\\ \text{m.c.m para eliminar los denominadores}\\ 1 = A\cdot(x-1) + B\,(x+1)\\ \text{Daremos valores a } x\text{, para que sea más sencillo serán a quellos valores}\\ \text{que anulan el denominador}\\ \text{si } x = 1 \rightarrow 1 = \cancel{A\cdot(1-1)} + B\,(1+1) \rightarrow B = \dfrac{1}{2}\\ \\ \text{si } x = -1 \rightarrow 1 = A\cdot(-1-1) + \cancel{B\,(-1+1)} \rightarrow A = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2}ln\,|x+1| + \frac{1}{2}ln\,|x-1| + k$$

Solución:

Las infinitas primitivas de f son $F\,(x) = \dfrac{x^3}{3} + x - \dfrac{1}{2}ln\,|x+1| + \dfrac{1}{2}ln\,|x-1| + k$

b) Acabamos de obtener $F(x) = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{1}{2}ln|x-1| + k$, pero no es la que necesito, porque nuestra primitiva depende de la constante k, que podrá tomar cualquier número real, así que no tenemos una primitiva si no tenemos infinitas, para determinar la que necesitamos debemos imponerle la condición indicada en el enunciado de que pasa por el punto $(2, 0)$.

Si la primitiva de f pasa por el punto (a, b) quiere decir que $F(a) = b$, así obtendremos una ecuación para determinar la constante k.

$$\left.\begin{array}{rl} F(x) = & \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{1}{2}ln|x-1| + k \\ F(2) = & \frac{2^3}{3} + 2 - \frac{1}{2}ln|2+1| + \frac{1}{2}ln|2-1| + k \\ F(2) = & 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} \frac{2^3}{3} + 2 - \frac{1}{2}ln|2+1| + \frac{1}{2}ln|2-1| + k = 0 \\ \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2}ln(3) + \frac{1}{2}ln(1) + k = 0 \\ k = -\frac{14}{3} + \frac{1}{2}ln(3) \end{array}$$

Solución:

La primitiva de f que pasa por el punto $(2, 0)$ es $F(x) = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{14}{3} + \frac{1}{2}ln(3)$.