Bloque 6: Integrales Definidas

Áreas

entre Gráficas 2019

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2019. TITULAR JUNIO. OPCION B. EJERCICIO 2.

Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

a) [1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

b) [1,5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

---

a) Esbozamos el recinto entre las gráficas:

Podemos representar funciones rápidamente mediante traslaciones horizontales o verticales de funciones elementales.

Si nuestra gráfica original es $y = f(x)$,entonces:

i) $y = f(x+k)$ será igual a $y = f(x)$ pero desplazada k unidades a la izquierda.

ii) $y = f(x-k)$ será igual a $y = f(x)$ pero desplazada k unidades a la derecha.

iii) $y = f(x)+k$ será igual a $y = f(x)$ pero desplazada k unidades hacia arriba.

iv) $y = f(x)-k$ será igual a $y = f(x)$ pero desplazada k unidades hacia abajo.

Para $f(x) = ln(x+2)$ usaremos la función elemental $f(x) = ln(x)$, que sabemos que tienen una asíntota vertical en $x = 0$ y pasa por el punto $(1,\ 0)$, pero se encuentra desplazada 2 unidades a la izquierda, por lo tanto nuestra función tendrá su asíntota vertical en $x = -2$ y pasará por el punto $A(-1,\ 0)$.

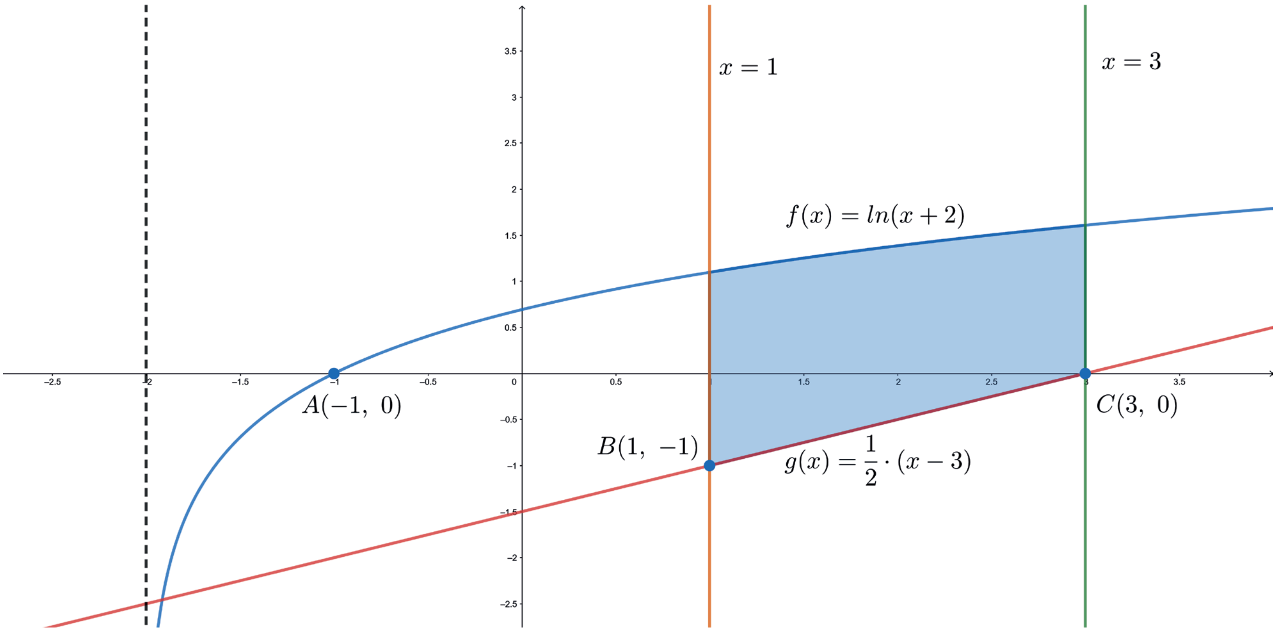
Mientras que para $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-3)$ la reescribimos para que tenga la forma $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$, así es más fácil darnos cuenta de que se trata de una función afín (una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas), cuya forma es $y = mx+n$, donde m nos indica la pendiente de la recta y n el punto de corte con el eje de ordenadas, datos que podemos usar para representarla pero para facilitarnos su representación al tratarse de una línea recta calcularemos dos puntos dándole los valores que queramos a la variable x.

$$g(1) = \frac{1}{2}(1-3) = -1 \rightarrow B(1,\ -1)$$

$$g(3) = \frac{1}{2}(3-3) = 0 \rightarrow C(3,\ 0)$$

Las dos últimas que tenemos que representar son $x = 1$ y $x = 3$ que son rectas verticales que pasan por 1 y 3 en el eje de abscisas.

Siendo su representación gráfica la siguiente:



b) Observando la gráfica anterior, el área pedida es la región sombreada definida por las curvas $f(x) = ln(x+2)$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ que serán nuestros límites de integración, por lo tanto definimos el área como

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define interiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_1^3 [f(x) - g(x)]\ dx = \int_1^3 \left[ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) \right] dx = \int_1^3 \left[ln(x+2) - \frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2} \right] dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una constante} \end{array} \right] = \int_1^3 ln(x+2)\ dx - \int_1^3 \frac{1}{2}\cdot x\, dx + \int_1^3 \frac{3}{2} dx =$$

$$= \int_1^3 ln(x+2)\ dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x\, dx + \frac{3}{2}\int_1^3\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Resolvemos cada unda de las} \\ \text{integrales por separado} \end{array} \right] =$$

$$= \left[x \cdot ln|x+2| - x + 2ln|x+2| - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}\cdot x \right]_1^3 =$$

$$= \left(3 \cdot ln\,|3+2| - 3 + 2ln\,|3+2| - \frac{3^2}{4} + \frac{3}{2} \cdot 3\right) - \left(1 \cdot ln\,|1+2| - 1 + 2ln\,|1+2| - \frac{1^2}{4} + \frac{3}{2} \cdot 1\right) =$$

$$= 3ln\,|5| - 3 + 2ln\,|5| - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - ln\,|3| + 1 - 2ln\,|3| + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} =$$

$$= 5ln\,(5) - 3ln\,(3) - 1\ u^2$$

Resolvemos cada una de las integrales por separado:

$$\int ln\,(x+2)\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes:} \\ \int udv = u \cdot v - \int vdu \\ u = ln\,(x+2) \xrightarrow{\text{derivamos}} \left\{ du = \frac{1}{x+2} \cdot dx \right. \\ dv = dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= \overbrace{ln\,(x+2)}^{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \overbrace{x}^{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+2}dx}_{du} = x \cdot ln\,(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{El grado del numerador es mayor o igual al del denominador} \\ \text{efectuamos la división entre ellas para reescribir la integral} \\ \begin{array}{cc|l} D(x) & & d(x) \\ \cline{3-3} r(x) & & c(x) \end{array} \rightarrow \int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{d(x)}dx \\ \begin{array}{cc|l} x & & x+2 \\ \cline{3-3} -x & -2 & 1 \\ & -2 & \end{array} \longrightarrow \int \frac{x}{x+2}dx = \int 1 \cdot dx + \int \frac{-2}{x+2}dx \end{array}\right] =$$

$$= x \cdot ln\,(x+2) - \left(\int 1 \cdot dx + \int \frac{-2}{x+2}dx\right) = x \cdot ln\,(x+2) - \int dx - \int \frac{-2}{x+2}dx =$$

$$= x \cdot ln\,(x+2) - \int dx + 2\int \frac{1}{x+2}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante integrales inmediatas del tipo:} \\ \\ \int dx = x + k \text{ y } \int \frac{u'}{u} dx = ln\,|u| + k \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot ln\,(x+2) - x + 2 \cdot ln\,|x+2| + k$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int x\, dx = \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante una} \\ \text{integral inmediate del tipo:} \\ \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \end{array} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2}{4} + k$$

$$\int 3\, dx = 3 \cdot \int dx = \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante una} \\ \text{integral inmediate del tipo:} \\ \int dx = x + k \end{array} \right] = 3x + k$$

Solución:

El área encerrada por la gráficas de f, g y delimitadas por las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$ es $5ln\,(5) - 3ln\,(3) - 1\ u^2$.

2019. SUPLENTE JUNIO. OPCION B. EJERCICIO 2.

Sean las funciones $f, g : [0,\ \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = sen(2x)$.
a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes de coordenados y calcula sus puntos de corte.
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{3}$.

a) Calculamos sus puntos de corten entre ellas igualándolas entre sí.

> Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = sen(x) \\ g(x) = sen(2x) \end{array}\right| \to \begin{array}{l} sen(x) = sen(2x) \\ sen(x) - sen(2x) = 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$sen(x) - sen(2x) = 0; \xrightarrow[sen(2x)=2sen(x)cos(x)]{\text{Sustituimos}} sen(x) - 2sen(x)\,cos(x) = 0$$

$$sen(x) - 2sen(x)\,cos(x) = 0 \xrightarrow[\text{a } sen(x)]{\text{Sacamos factor común}} sen(x) \cdot [1 - 2cos(x)] = 0$$

$$sen(x) \cdot [1 - 2cos(x)] = 0 \to \begin{cases} sen(x) = 0 \to x = arcsen(0) = 2\pi \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 1 - 2cos(x) = 0 \to x = arcos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

De las soluciones obtenidas solo son válidas aquellas que se encuentren dentro del dominio de la función, en este caso concreto el enunciado nos indica que solo serán válidas aquellas comprendidas entre 0 y π, $x \in [0,\ \pi]$, en consecuencia las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ y $x_3 = \dfrac{\pi}{3}$.

Ahora que ya tenemos los valores de x los sustituimos en una de las dos gráficas para obtener su coordenada en el eje de ordenadas.

Para $x = 0 \to f(0) = sen(0) = 0 \to A(0,\ 0)$

Para $x = \pi \to f(\pi) = sen(\pi) = 0 \to B(\pi,\ 0)$

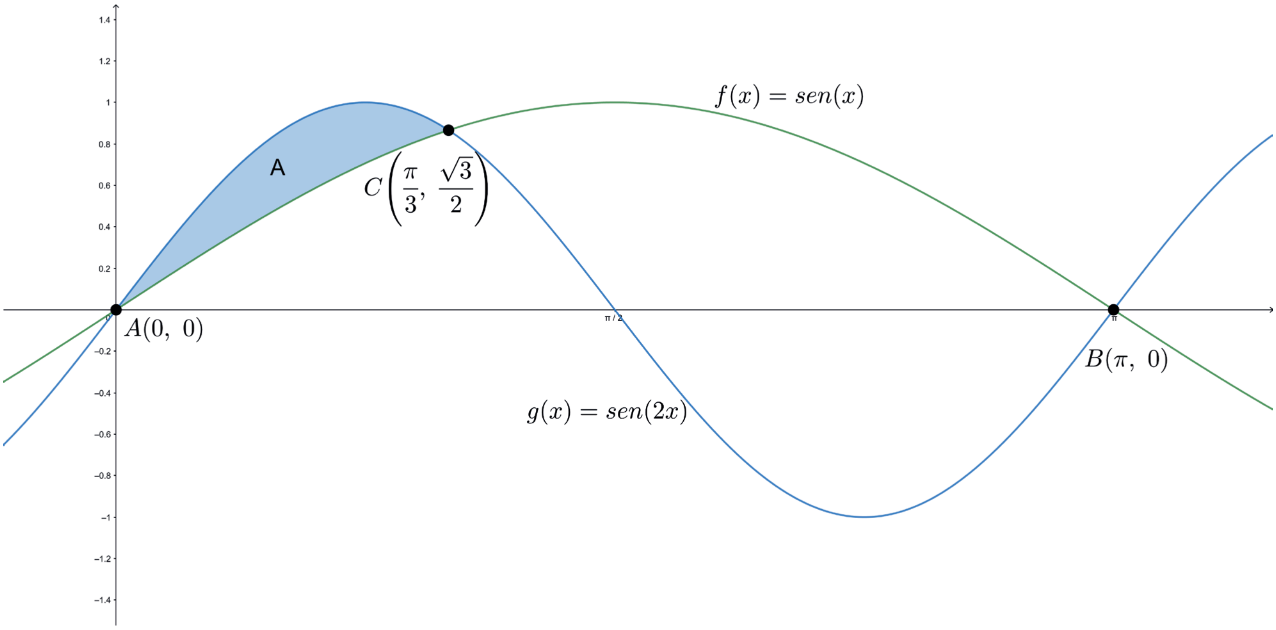
Para $x = \dfrac{\pi}{3} \to f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to C\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Si $f(x)$ es una función periódica de Periodo T, entonces $f(kx)$ tendrá la misma forma pero con un periodo distinto, $T' = \frac{T}{k}$, es decirm al multiplicarla por un número una función periódica aumentamos o disminuimos el periodo de la función resultante.

Para $f(x) = sen(x)$ sabemos que es una función trigonométrica fundamental, que pasa por el punto $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y $(\pi, 0)$, con periodicidad $T = 2\pi$.

Mientras que para $g(x) = sen(2x)$ emplearemos la función elemental $f(x) = sen(x)$, puesto que solo se diferencian en su periodo, siendo el periodo de $g(x)$ $T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$, el nuevo periodo es la mitad de la anterior, lo que significa que tendrá la misma forma pero avanzará el doble de rápido, por lo tanto pasará por los puntos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.



b) Observando la representación anterior, la gráfica de g se encuentra siempre por encima de f en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$ conformarán nuestros límites de integración.

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define interiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [g(x) - f(x)]\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [sen\,(2x) - sen\,(x)]\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\,(2x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\,(x)\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante} \\ \text{integrales inmediatas del tipo:} \\ \int sen\,(x)\ dx = -cos\,(x) + k \\ \int sen\,(ax)\ dx = -\dfrac{cos\,(ax)}{a} + k \end{array} \right] = \left[-\frac{cos\,(2x)}{2} + cos\,(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(-\frac{cos\,\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{2} + cos\,\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \right) - \left(-\frac{cos\,(2 \cdot 0)}{2} + cos\,(0) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot cos\,\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + cos\,\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot cos\,(0) - cos\,(0) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = \frac{1}{4}\, u^2$$

Solución:

El área encerrada por la gráficas f, g y delimitadas por las rectas verticales $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$ es de $\frac{1}{4}\, u^2$.

2019. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCION B. EJERCICIO 2.

Considera las funciones $f, g : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = cos(x)$ y $g(x) = sen(x)$.

a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes de coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y de g en el intervalo $\left[-\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

---

a) Calculamos sus puntos de corten entre ellas igualándolas entre sí.

> Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = cos(x) \\ g(x) = sen(x) \end{array}\right| \to \quad cos(x) = sen(x)$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$cos(x) = sen(x);\ \xrightarrow[\text{miembros por } cos(x)]{\text{Dividimos ambos}} \frac{cos(x)}{cos(x)} = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$1 = \frac{sen(x)}{cos(x)} \xrightarrow[tan(x)=\frac{sen(x)}{cos(x)}]{\text{Como}} tan(x) = 1 \to x = arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

De las soluciones obtenidas solo son válidas aquellas que se encuentren dentro del dominio de la función, en este caso concreto el enunciado nos indica que solo serán válidas aquellas comprendidas entre $-\pi$ y π, $x \in [-\pi,\ \pi]$, en consecuencia las soluciones de la ecuación son $x_1 = -\dfrac{3\pi}{4}$ y $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Ahora que ya tenemos los valores de x los sustituimos en una de las dos gráficas para obtener su coordenada en el eje de ordenadas.

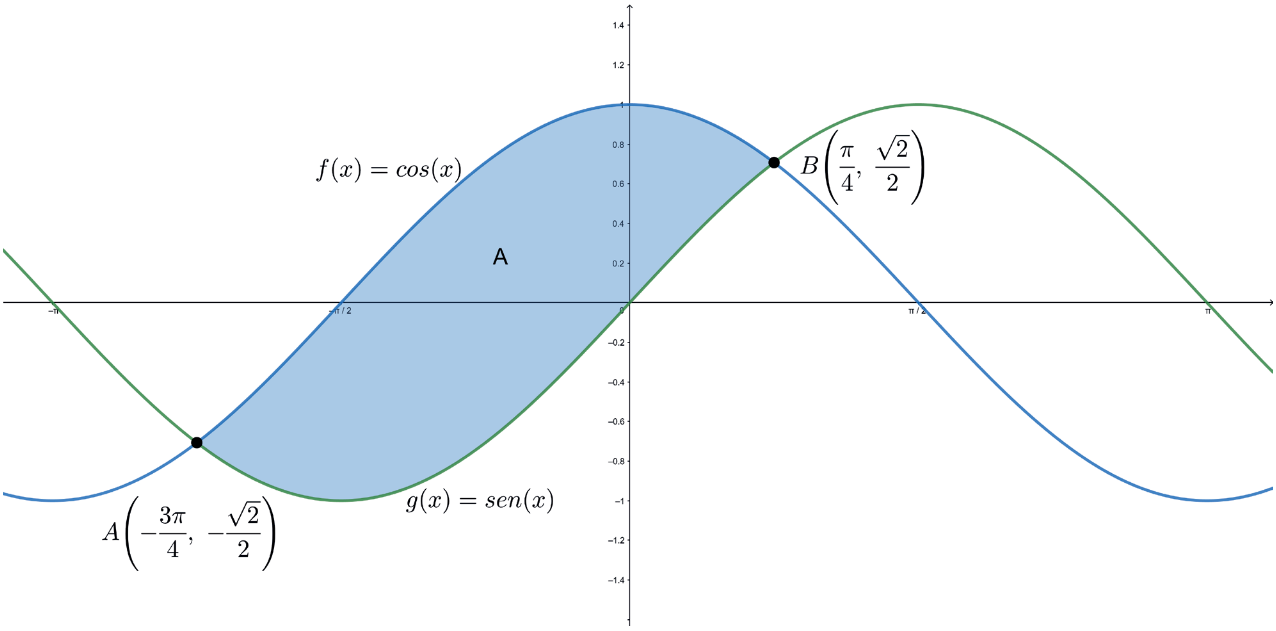
$$\text{Para } x = -\frac{3\pi}{4} \to f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to A\left(-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Para } x = \frac{\pi}{4} \to f\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \to B\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = sen(x)$ sabemos que es una función trigonométrica fundamental, que pasa por el punto $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ y $(\pi,\ 0)$, con periodicidad $T = 2\pi$.

Mientras que para $g(x) = cos(x)$ también es una función elemental $f(x) = sen(x)$, que pasa por el punto $(0,\ 1)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ y $(\pi,\ -1)$, con periodicidad $T = 2\pi$.



b) Observando la representación anterior, la gráfica de f se encuentra siempre por encima de g en el intervalo indicado, siendo los valores $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$ nuestros límites de integración.

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define interiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - g(x)]\ dx = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [cos(x) - sen(x)]\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \end{array}\right] = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)\ dx - \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sen(x)\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante} \\ \text{integrales inmediatas del tipo:} \\ \int sen\,(x)\;\; dx = -cos\,(x) + k \\ \int cos\,(x)\;\; dx = sen\,(x) + k \end{array} \right] = \left[sen\,(x) - (-cos\,(x))\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left[sen\,(x) + cos\,(x)\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(sen\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,u^2$$

Solución:

El área encerrada por la gráficas f, g en el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ es de $2\sqrt{2}\,u^2$.

2019. RESERVA B. OPCION A. EJERCICIO 2.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x-8 & \text{si} \quad x\leq 4 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcula los puntos de corte entre la gráfica de f y la recta $y=2x-4$. Esboza el recinto que delimitan la gráfica de f y la recta.
b) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.

---

a) Calculamos sus puntos de corten entre ellas igualándolas entre sí.

Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones. Al ser una de ellas una función a trozos debemos de igualar cada uno de los trozos a la otra función, rechazando las soluciones que no se encuentren en su dominio.

Para $x\leq 4$, tendremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+6x-8 \\ g(x)=2x-4 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} -x^2+6x-8=2x-4 \\ -x^2+4x-4=0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$-x^2+4x-4=0\rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{-2}=2$$

Se acepta puesto que $2\leq 4$, ahora sustituimos en cualquiera de las dos gráficas para obtener su coordenada en el eje de ordenadas.
Para $x=2\rightarrow g(2)=2\cdot 2-4=0\rightarrow A(2,\ 0)$

Mientras que para $x>4$, tendremos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+8 \\ g(x)=2x-4 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} x^2-6x+8=2x-4 \\ x^2-8x+12=0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$x^2-8x+12=0\rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{8-4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{8+4}{2}=6 \end{cases}$$

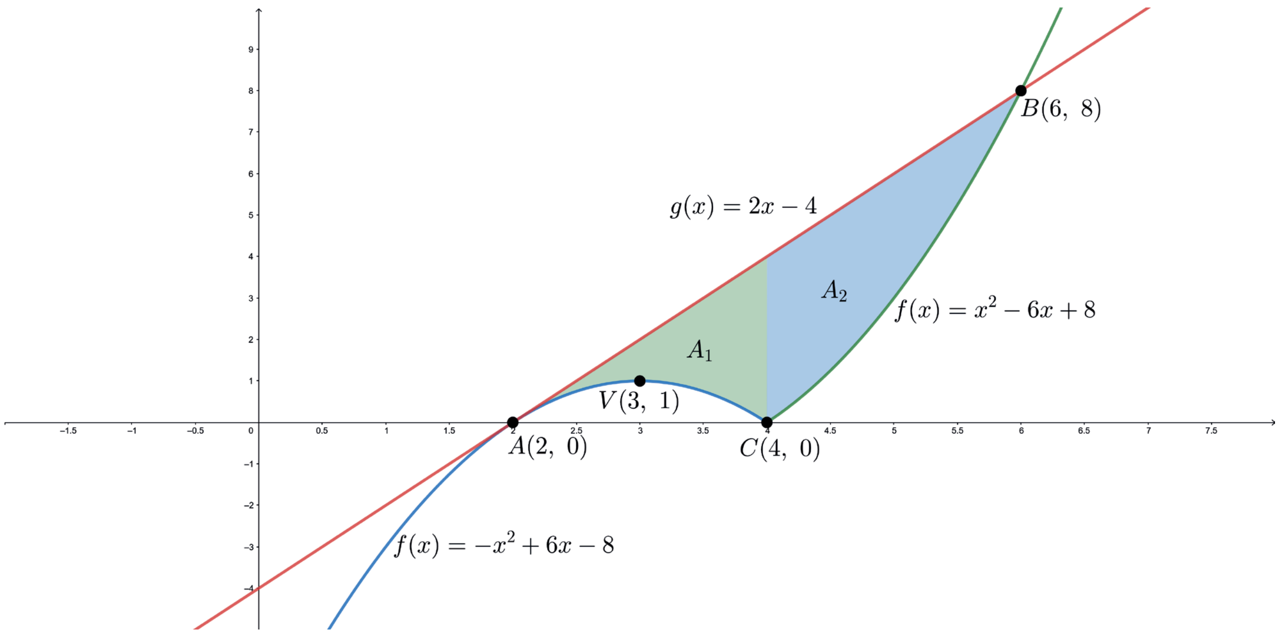
De las dos soluciones obtenidas $x_1=2$ y $x_2=6$, solo se acepta $x=6$ al ser la única que verifica la condición $x>4$. Ahora sustituimos en cualquiera de las dos gráficas para obtener su coordenada en el eje de ordenadas.
Para $x=6\rightarrow g(6)=2\cdot 6-4=8\rightarrow B(6,\ 8)$

Esbozamos el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = \begin{cases} -x^2+6x-8 & \text{si} \quad x \leq 4 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$, sabemos que se trata de una función a trozos compuesta por dos parábolas al ser polinomios de orden 2, si las observamos detenidamente nos damos cuenta de que ambas parábolas son iguales pero multiplicadas por -1, significando que son simétricas respecto del eje de abscisas (Eje OX), es decir serán exactamente iguales pero con los valores de la coordenada Y cambiados de signo, por lo tanto solo es necesario para representarla calcular el vértice y los puntos de corte con el eje OX, nosotros usaremos $f(x) = -x^2+6x-8$.

- Vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.
  $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2\cdot(-1)} = 3 \to f(3) = -(3)^2+6\cdot 3-8 = 1 \to V(3,\ 1)$
- Corte eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.
  $-x^2+6x-8 = 0 \to x = \frac{-6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot(-1)\cdot(-8)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-6\pm 2}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-6-2}{-2} = 4 \to C(4,\ 0) \\ x_2 = \frac{-6+2}{-2} = 2 \to A(2,\ 0) \end{cases}$

Mientras que para $g(x) = 2x-4$ tenemos una función afín (una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas), cuya forma es $y = mx+n$, donde m nos indica la pendiente de la recta y n el punto de corte con el eje de ordenadas, datos que podemos usar para representarla pero para facilitarnos su representación al tratarse de una línea recta calcularemos dos puntos dándole los valores que queramos a la variable x, dichos puntos ya los tenemos calculados al ser los puntos de corte entre ambas gráficas.



b) Observando la representación anterior, nos percatamos que debemos de dividir el área entre las gráficas en dos regiones distintas, en ambas regiones la la gráfica de g se encuentra siempre por encima de f. Siendo la expresión del área

$$A_t = A_1 + A_2 \tag{1}$$

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define interiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A_1 = \int_2^4 [g(x) - f(x)]\ dx = \int_2^4 \left[2x - 4 - \left(-x^2 + 6x - 8\right)\right]\ dx = \int_2^4 \left(2x - 4 + x^2 - 6x + 8\right)\ dx =$$

$$= \int_2^4 \left(x^2 - 4x + 4\right)\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx,\ \text{siendo } a \text{ una cosntante} \end{array}\right] =$$

$$= \int_2^4 x^2\, dx - 4 \cdot \int_2^4 x\, dx + \int_2^4\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante} \\ \text{integrales inmediatas del tipo:} \\ \int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \int dx = x + k \end{array}\right] =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_2^4 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_2^4 = \left(\frac{(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 4\right) - \left(\frac{(2)^3}{3} - 2(2)^2 + 4\right) =$$

$$= \frac{64}{3} - 32 + 4 - \frac{8}{3} + 8 - 4 = \frac{8}{3}\, u^2$$

$$A_2 = \int_4^6 [g(x) - f(x)]\ dx = \int_4^6 \left[2x - 4 - \left(x^2 - 6x + 8\right)\right]\ dx = \int_4^6 \left(2x - 4 - x^2 + 6x - 8\right)\ dx =$$

$$= \int_4^6 \left(-x^2 + 8x - 12\right)\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx,\ \text{siendo } a \text{ una constante} \end{array}\right] =$$

$$= -\int_4^6 x^2\,dx + 8\cdot\int_4^6 x\,dx - 12\int_4^6\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{Nos encontramos ante}\\ \text{integrales inmediatas del tipo:}\\ \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k\\ \int dx = x+k\end{array}\right] =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2} - 12x\right]_4^6 = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x\right]_2^4 =$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 4\cdot(4)^2 - 12\cdot(4)\right) - \left(-\frac{(2)^3}{3} + 4\cdot(2)^2 - 12\cdot(2)\right) =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - 48 + \frac{8}{3} - 16 + 24 = \frac{16}{3}\,u^2$$

Sustituimos los resultados del $A_1 = \dfrac{8}{3}$ y $A_2 = \dfrac{16}{3}$ en la expresión (1) para obtener el área pedida.

$$A_t = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = \frac{24}{3} = 8\,u^2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f y g es de $8\,u^2$.