Bloque 6: Integrales Definidas

Áreas con Parámetros 2019

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2019. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCION B. EJERCICIO 2.

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x^2}$.
a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1,25 puntos] Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

---

a) Calculamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Eje OX, le imponemos la condición $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función dada y resolvemos la ecuación que obtenemos:

$$xe^{-x^2} = 0 \to \begin{cases} e^{-x^2} \neq 0 \to \text{no es posible} \\ x = 0 \to A(0, 0) \end{cases}$$

Al obtener como punto de corte el $(0, 0)$ no es necesario calcular en el eje OY pues siempre será el mismo, aunque nosotros lo calcularemos de todas formas.

- Eje OY, le imponemos la condición $x = 0$, sencillamente calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 0 \cdot e^{-0^2} = 0 \to A(0, 0)$$

Al igualar a cero la primera derivada, buscamos los puntos donde la función no es diferenciable así obtendremos los punto críticos, que serán los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable (a, b) podemos determinar la monotonía si estudiaremos el signo de $f'(x)$ pues:

- Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en el intervalo (a, b).
- Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

En los valores de x donde pasamos de crecer a decrecer tendremos un máximo relativo, mientras que si pasamos de decrecer a crecer tendremos un mínimo relativo.

Calculamos $f'(x)$, para obtener los extremos relativos:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = \left[\text{Sacamos factor común a } e^{-x^2} \right] = e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right)$$

Imponemos la condición $f'(x) = 0$, para determinar los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x) & = & e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) \\ f'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-x^2} \neq 0 \\ 1 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$, incorporando los puntos críticos obtenidos anteriormente $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Intervalos	$\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$ Decrece	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece

Por definición donde se produce un cambio en la monotonía (y no es un problema del dominio) nos encontramos ante los máximo y mínimos relativos de la función, en nuestro caso para $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pasamos de decrecer a crecer y por lo tanto tenemos un mínimo relativo, mientras que para $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pasamos de crecer a decrecer y por lo tanto tenemos un máximo relativo. A continuación calculamos la imagen para el valor de x obtenido, para determinar su valor en el eje de ordenadas (eje OY) sustituyéndolo en $f(x)$.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Mínimo relativo en el punto } C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Solución:

$f(x)$ corta a los ejes de coordenados en el punto $A(0,\ 0)$.

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

b) Gracias al apartado anterior , la gráfica de f en el intervalo $[0,\ a]$ es siempre positiva, esto es debido a que solo corta en el eje en el punto $A(0,\ 0)$ y la imagen de su máximo relativo es positivo por lo tanto se encuentra siempre por encima del eje OX (esta información no es útil para saber que la integral será la función menos el eje de abscisas). El área cuyo valor es $\frac{1}{4}$ se encontrará definida por la curva $f(x) = x\cdot e^{-x^2}$, el eje de abscisas $y = 0$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ que serán nuestros límites de integración. en consecuencia

$$\frac{1}{4} = \int_0^a \left(xe^{-x^2} - 0\right)\,dx = \int_0^a xe^{-x^2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Nos encontramos ante una integral casi inmediata,}\\ \text{que solo debemos de reescribirla para que se}\\ \text{convierta a una del tipo:}\\ \int u'\cdot e^u\,dx = e^u + k\end{array}\right] =$$

$$= \int_0^a xe^{-x^2}\cdot\frac{-2}{-2}\,dx = \int_0^a xe^{-x^2}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a -2xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-a^2} - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Resolvemos la siguiente ecuación $-\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ para obtener el valor del parámetro a.

$$-\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4};\quad -2e^{-a^2} + 2 = 1;\quad -2e^{-a^2} = -1$$

$$e^{-a^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{para poder bajar } a]{\text{Aplicamos logaritmo en ambos lados}} ln\left(e^{-a^2}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

A continuación aplicamos las siguientes propiedades de los logaritmos $log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = log_c\,(a) - log_c\,(b)$, $log_a\,(a) = 1$, $log_c\,\left(a^b\right) = b \cdot log_c\,(a)$ y $log_c\,(1) = 0$.

$-a^2 \cdot ln\,(e) = ln\,(1) - ln\,(2)\,;\ \ -a^2 \cdot 1 = 0 - ln\,(2)$

$a^2 = ln\,(2) \rightarrow a = \pm\sqrt{ln\,(2)}$

Como el enunciado nos indica que $a > 0$, de las dos soluciones obtenidas, $a_1 = -\sqrt{ln\,(2)}$ y $a_2 = \sqrt{ln\,(2)}$, solo es válida $a = \sqrt{ln\,(2)}$.

Solución:

El área definida por la gráfica de f y el eje de abscisa en el intervalo dado valdrá $\dfrac{1}{4}$ si $a = \sqrt{ln\,(2)}$ bajo la premisa que $a > 0$.

2019. RESERVA A. OPCION A. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Dado un número real $a > 0$, considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - ax$, y la recta $y = 2ax$. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

Realizaremos una representación de ambas funciones, para ello en primer lugar calcularemos los puntos de corte entre ellas (así será más fácil realizar el boceto de ambas gráficas y tendremos los límites de integración).

> Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - ax \\ g(x) = 2ax \end{array}\right| \to \quad x^2 - ax = 2ax$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$x^2 - ax = 2ax; \; x^2 - ax - 2ax = 0; \; x^2 - 3ax = 0 \xrightarrow[\text{a la variable } x]{\text{Sacamos factor común}} x \cdot (x - 3a) = 0 \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 3a = 0 \to x_2 = 3a \end{cases}$$

Ahora que ya tenemos los valores de x los sustituimos en una de las dos gráficas para obtener su coordenada en el eje de ordenadas.

Para $x = 0 \to g(0) = 2a \cdot 0 = 0 \to A(0,\, 0)$

Para $x = 3a \to g(3a) = 2a \cdot 3a = 6a^2 \to B\left(3a,\, 6a^2\right)$

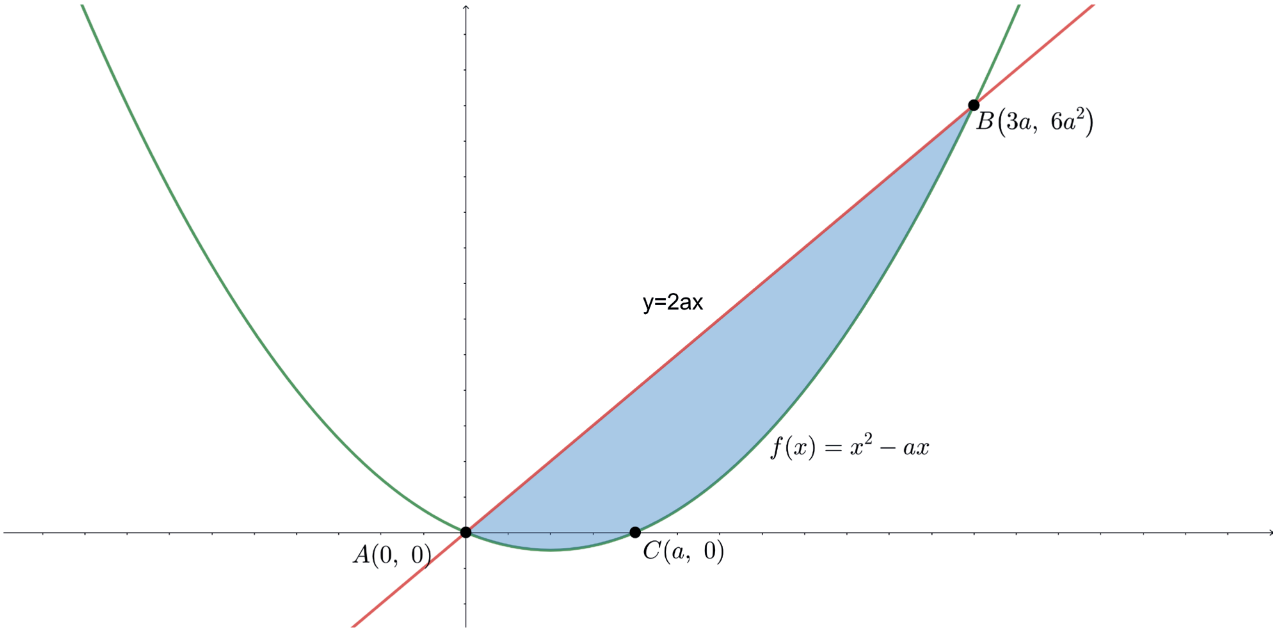
En segundo lugar analizaremos las funciones dadas para poder esbozar el recinto entre ambas gráficas:

Para $f(x) = x^2 - ax$, sabemos que se trata de una parábola por ser un polinomio de orden 2, cuyo coeficiente que acompaña a la x^2 es positiva por tanto es convexa $(\cup)$, para esbozarla solamente necesitaremos sus puntos de corte con el eje OX.

- Corte eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

$$x^2 - ax = 0 \xrightarrow[\text{a la variable } x]{\text{Sacamos factor común}} x \cdot (x - a) = 0 \to \begin{cases} x_1 = 0 \to A(0,\, 0) \\ x - a = 0 \to x_2 = a \to C(a,\, 0) \end{cases}$$

Mientras que para $g(x) = 2ax$ tenemos una función lineal (línea recta que pasa por el origen de coordenadas), que es creciente porque el término que acompaña a la x es positivo (recuerda que $a > 0$ nos lo indica el enunciado). Solo necesitaríamos dos puntos para su representación que ya los tenemos pues son los puntos de corte entre ambas gráficas.



Observando la representación anterior, la gráfica de g se encuentra siempre por encima de f en el intervalo $(0,\ 3a)$, siendo el área comprendida entre ellas $36\ u^2$,encontrándose definida la región por las curvas $f(x) = x^2 - ax$, $g(x) = 2ax$ y siendo $x = 0$ y $x = 3a$ nuestros límites de integración.

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define interiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$36 = \int_0^{3a} [g(x) - f(x)]\ dx = \int_0^{3a} \left[2ax - \left(x^2 - ax\right)\right]\ dx = \int_0^{3a} \left(2ax - x^2 + ax\right)\ dx =$$

$$= \int_0^{3a} \left(-x^2 + 3ax\right)\ dx = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una constante} \end{array}\right] =$$

$$= -\int_0^{3a} x^2\, dx + 3a \int x\, dx = \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante una} \\ \text{integral inmediata del tipo:} \\ \int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \end{array}\right] =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{3a} = \left[\frac{3ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{3a} = \left(\frac{3a \cdot (3a)^2}{2} - \frac{(3a)^3}{3}\right) - \left(\frac{3a \cdot (0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{3} - 0 = \frac{27a^3}{2} - 9a^3 = 36$$

Resolvemos la siguiente ecuación $\frac{27a^3}{2} - 9a^3 = 36$ para obtener el valor del parámetro a.

$$\frac{27a^3}{2} - 9a^3 = 36; \;\; 27a^3 - 18a^3 = 72; \;\; 9a^3 = 72; \;\; a^3 = 8 \rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2$$

Solución:

El área definida por la gráfica de f y g valdrá 36 u^2 si $a = 2$ bajo la premisa que $a > 0$.

2019. RESERVA B. OPCION B. EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -4x^2 + a$, siendo $a > 0$ un número real. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 0$. Calcula a sabiendo que el área del recinto es 18.

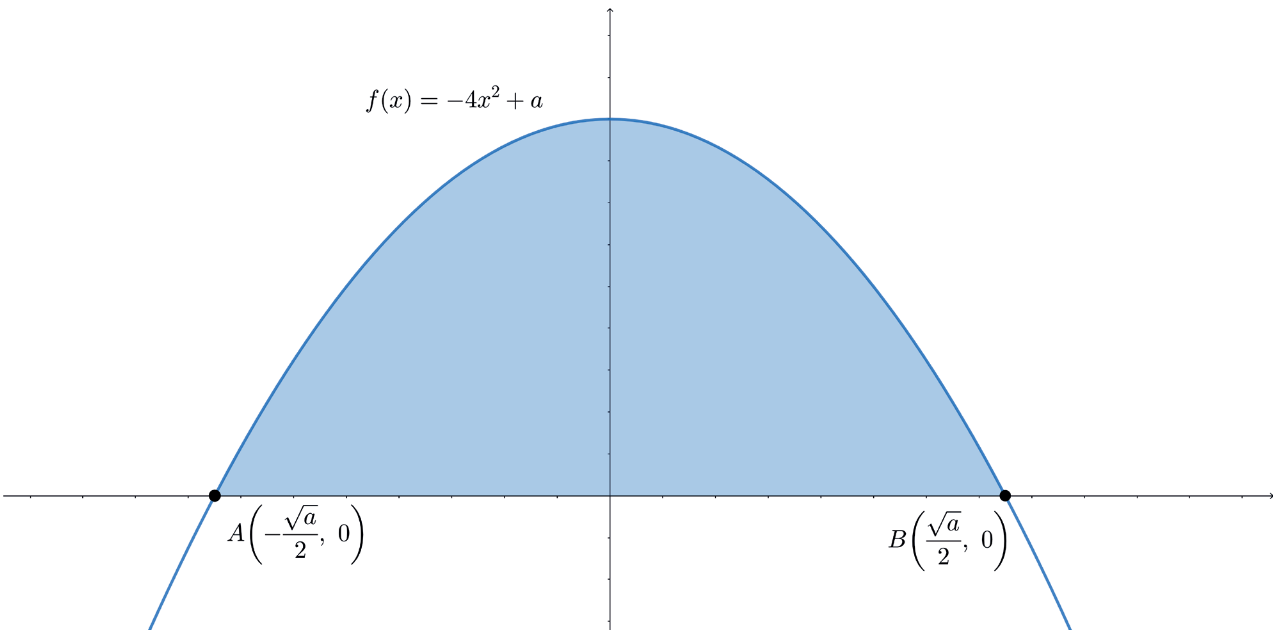
Para calcular los puntos de corte entre dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ solamente debemos de igualarlas entre sí y resolver el sistema de ecuaciones.

Primero realizaremos una representación de ambas funciones, recordando que la recta $y = 0$ es el propio eje de abscisas (eje OX) con lo cual no es necesario hacer ningún calculo a la hora de representarla. Sin embargo para $f(x) = -4x^2 + a$, sabemos que se trata de una parábola por ser un polinomio de orden 2, cuyo coeficiente que acompaña a la x^2 es negativo por lo tanto es cóncava ($\cap$), en consecuencia para esbozarla solamente necesitaremos sus puntos de corte con el eje OX.

- Corte eje OX: le imponemos la condición de que $y = 0$, sencillamente igualamos a cero la función y resolvemos la ecuación obtenida.

$$-4x^2 + a = 0;\;\; 4x^2 = a \to x = \pm\sqrt{\frac{a}{4}} = \pm\frac{\sqrt{a}}{2} \to \begin{cases} A\left(-\dfrac{\sqrt{a}}{2},\, 0\right) \\ B\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2},\, 0\right) \end{cases}$$

A la hora de realizar su representación todos los datos se quedarán en función del parámetro a, con lo cual solo nos servirán para hacernos una idea del área pedida (por este mismo motivo el ejercicio no indica que hagamos su representación).



Observando la representación anterior, la gráfica de f se encuentra siempre por encima de la recta $y = 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}, \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$, siendo el área comprendida entre ellas $18\ u^2$,encontrándose definida la región por las curvas $f(x) = -4x^2 + a$, $g(x) = 0$ y siendo sus límites de integración $x_1 = -\frac{\sqrt{a}}{2}$ y $x_2 = \frac{\sqrt{a}}{2}$.

El área entre dos funciones es la integral comprendida entre los límites de integración de la función que define la región superiormente menos la que la define interiormente.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} [f(x) - g(x)]\ dx = \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left(-4x^2 + a - 0\right)\ dx = \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left(-4x^2 + a\right)\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos las siguientes} \\ \text{propiedades de las integrales:} \\ \int (u \pm v)\ dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \\ \\ \int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx, \text{ siendo } a \text{ una constante} \end{array}\right] =$$

$$= -4 \cdot \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} x^2\, dx + a \cdot \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} dx = \left[\begin{array}{c} \text{Nos encontramos ante} \\ \text{integrales inmediatas del tipo:} \\ \int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \\ \int dx = x + k \end{array}\right] =$$

$$= \left[-4 \cdot \frac{x^3}{3} + a \cdot x\right]_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} = \left[-\frac{4x^3}{3} + ax\right]_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^3}{3} + a \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\right) - \left(-\frac{4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^3}{3} + a \cdot \left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{4 \cdot \frac{a\sqrt{a}}{8}}{3} + \frac{a\sqrt{a}}{2} - \frac{4 \cdot \frac{a\sqrt{a}}{8}}{3} + \frac{a\sqrt{a}}{2} = -\frac{a\sqrt{a}}{6} + \frac{a\sqrt{a}}{2} - \frac{a\sqrt{a}}{6} + \frac{a\sqrt{a}}{2} =$$

$$= -\frac{2a\sqrt{a}}{6} + \frac{2a\sqrt{a}}{2} = -\frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}\ u^2$$

Le imponemos la condición indicada en el enunciado de que el área sea de 18 para obtener la siguiente ecuación $\frac{2a\sqrt{a}}{3} = 18$, que la resolveremos a continuación para determinar el valor del parámetro a.

$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = 18$; $a\sqrt{a} = \frac{18 \cdot 3}{2}$; $a\sqrt{a} = 27$, elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$\left(a\sqrt{a}\right)^2 = 27^2$; $a^2 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2 = 27^2$; $a^3 = 27^2 \rightarrow a = \sqrt[3]{27^2} = 9$

Solución:

El área definida por la gráfica de f y la recta $y = 0$ valdrá 18 u^2 si $a = 9$ bajo la premisa que $a > 0$.