Bloque 2: Sistema de Ecuaiones Lineales

Problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2012

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2012. RESERVA B. OPCION A. EJERCICIO 3. 4

2012. RESERVA B. OPCION A. EJERCICIO 3.

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
a) [1,25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.
b) [1,25 puntos] Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20 % y un 25 % de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Planteamos el sistema de ecuaciones mediante las condiciones indicadas en el enunciado, indicando previamente que representará cada una de las incógnitas:

- X representará el precio de un libro.
- Y representará el precio de una calculadora.
- Z representará el precio de un estuche.

"ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche"

$$x + y + z = 57 \tag{1}$$

"el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos"

$$x = y + z \tag{2}$$

No sabemos ante que tipo de sistema nos encontramos, para no tener clasificarlo y luego resolverlo si es posible, usaremos el método de Gauss-Jordan:

- *S.C.D.*una única solución para cada una de las incógnitas, obtendremos $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{array}\right)$
- *S.C.I.*, el sistema tendrá infinitas soluciones, aunque alguna de ellas pueda tener una única solución, obtendremos $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- *S.I.*, no tiene solución, no pudiendo resolver el problema, obtendremos $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h \end{array}\right)$

Sin leer ninguno de los apartados tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

a) En este apartado no nos facilitan datos para desarrollar una tercera ecuación, por tanto resolveremos el sistema que tenemos. El sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 57 \\ x & = & 2\cdot(y+z) \end{array}\right.$$

Preparamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 57 \\ x & = & 2\cdot(y+z) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 57 \\ x-2y-2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Reconocemos que es un sistema homogéneo porque cada una de las ecuaciones están igualadas a cero y no poseen termino independiente. Se caracterizan porque siempre que sean Sistemas Compatibles Determinados poseen la denominada solución trivial $x=0$, $y=0$ y $z=0$, mientras que si son Sistemas Compatibles Indeterminados aparte de la solución trivial pueden tener otra solución.

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 57 \\ x-2y-2z & = & 0 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1}$$

$$\xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 3 & 0 & 0 & 114 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 57 \\ 3x & = & 114 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema nos damos cuenta que es un Sistema Compatible Indeterminado, con 1 grado de libertad (restamos al número de incógnitas el número de ecuaciones linealmente independientes) por tanto a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z=\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 57 \\ 3x & = & 114 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcl} (38)+y+(\theta) & = & 57 \\ x & = & 38 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 38 \\ y & = & 19-\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right. , \quad \begin{array}{l} \forall\theta\in\mathbb{R} \text{ otra forma de expresarla} \\ (x,\ y,\ z)=(38;\ 19-\theta;\ \theta)\ ;\ \forall\theta\in\mathbb{R} \end{array}$$

A pesar de ser un Sistema Compatible Indeterminado una de las soluciones no depende del parámetro θ, en consecuencia siempre que tengamos un Sistema Compatible con estas dos ecuaciones sabremos que la variable x valdrá 38.

Solución:

A pesar de ser un Sistema Compatible Indeterminado hemos podido determinar de forma única el precio del libro que ha resultado ser de 38 euros al ser la única variable que no depende del parámetro θ.

b) Desarrollamos la nueva condición que añadiremos al sistema anterior.

"libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20 % y un 25 % de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros"

$$0,5x + 0,8y + 0,75z = 34$$

El sistema formado es:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 57 \\ x-2y-2z & = & 0 \\ 0,5x+0,8y+0,75z & = & 34 \end{array}\right. \xrightarrow{F_3=20\cdot F_3} \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 57 \\ x-2y-2z & = & 0 \\ 10x+16y+15z & = & 680 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 57 \\ x-2y-2z & = & 0 \\ 10x+16y+15z & = & 680 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 10 & 16 & 15 & 680 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-10F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \\ 0 & 6 & 5 & 110 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+2F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 57 \\ -3y-3z & = & -57 \\ -z & = & -4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} x+y+(4) & = & 57 \\ -3y-3\cdot(4) & = & -57 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 53 \\ -3y & = & -45 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} x+(15) & = & 53 \\ y & = & 15 \\ z & = & 4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 38 \\ y & = & 15 \\ z & = & 4 \end{array}\right. .$$

Otra forma de expresar la solución del sistema es $(x,\ y,\ z) = (38,\ 15,\ 4)$.

Solución:

El precio del libro, calculadora y estuche con las condiciones impuestas son de 38, 15 y 4 euros respectivamente.