Bloque 1: Matrices y Determinantes

Ecuaciones

Matriciales 2012

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2012. TITULAR JUNIO. OPCION A. EJERCICIO 3.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? Justifique la respuesta.
(b) [1,5 puntos] Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

(a) Calculamos $|A|$ y le impondremos la condición de que sea cero, así obtendremos los valores de k para los cuales no posee inversa.

Una matriz cuadrada A no tiene inversa si $|A| = 0$, averiguaremos los valores de k para los cuales $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 2 & 1 & \cancel{2} \\ 1 & k & \cancel{1} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot [2 \cdot k - 1 \cdot 1] = 2k - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = 2k - 1 \\ |A| = 0 \end{array}\right| \; 2k - 1 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

El único valor que provoca que la matriz A no tenga inversa es $k = \frac{1}{2}$.

Solución:

La matriz A no tendrá inversa si $|A| = 0$ que solo es posible para $k = \frac{1}{2}$.

(b) Para $k = 0$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$(X + I) \cdot A = A^t$$

Como A se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$(X + I) \cdot A = A^t \rightarrow (X + I) \cdot A \cdot A^{-1} = A^t \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow (X + I) \cdot I = A^t \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad (X + I) \cdot I = (X + I) \rightarrow X + I = A^t \cdot A^{-1}$$

Pasamos la matriz I al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X + I = A^t \cdot A^{-1} \rightarrow X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, A^t, $A^t \cdot A^{-1}$ y posteriormente $A^t \cdot A^{-1} - I$.

La matriz A posee inversa porque según el apartado anterior nuestra $k \neq \frac{1}{2}$ y , por tanto para $k = 0$ el $|A| \neq 0$, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$|A|$ ya lo tenemos resuelto pero en función del parámetro, en este caso k, así que solo debemos sustituirlo por el valor que nos indica el apartado.

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (cof\,(A))^t \tag{1}$$

$|A| = 2k - 1$ para $k = 0$ | $|A| = 2 \cdot (0) - 1 = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^t y $A^t \cdot A^{-1}$.

$$A^t_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^t_{3x3} \cdot A^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot(-1)+2\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 0 \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot(-2)+0\cdot 0 \\ 1\cdot(-1)+2\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $A^t \cdot A^{-1} - I$ para obtener la matriz X.

$$X = A^t \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-1 & 2-0 & -4-0 \\ 0-0 & 1-1 & -2-0 \\ 0-0 & 2-0 & -3-1 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}_{3x3}$.

2012. SUPLENTE JUNIO. OPCION B. EJERCICIO 3.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Comprueba que las matrices A y B poseen inversa.

(b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

(a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero, calculamos el $|A|$ y $|B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 13 \neq 0 \to \exists A^{-1}$$

Para calcular el $|B|$ usaremos la propiedad de los determinantes que nos dice que el determinante del producto de dos matrices es igual que el producto de sus determinantes. Para ello aplicaremos determinantes en la ecuación dada.

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \to |A \cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| \cdot |B| = -2 \cdot 3 - 7 \cdot 1$$

$$13 \cdot |B| = -13 \to |B| = \frac{-13}{13} = -1 \neq 0 \to \exists B^{-1}$$

Solución:

Como $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$ ambas matrices tienen inversa.

b) Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A^{-1}X - B = B \cdot A$$

Pasaremos la matriz B al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$A^{-1}X - B = BA \to A^{-1}X = B \cdot A + B$$

Como A^{-1} se encuentra multiplicando a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A.

$$A^{-1}X = B \cdot A + B \to A \cdot A^{-1} \cdot X = A \cdot (B \cdot A + B)$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \to I \cdot X = A \cdot (B \cdot A + B)$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \to X = A \cdot (B \cdot A + B)$$

No tenemos la matriz B, que podríamos hallarla, pero si aplicamos las propiedades del producto de matrices obtendremos una ecuación matricial donde no será necesario saber la matriz B.

$$X = A \cdot (B \cdot A + B) \rightarrow X = A \cdot B \cdot A + A \cdot B \rightarrow X = (AB) \cdot A + AB$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = (AB) \cdot A + AB$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos $(AB) \cdot A$ y posteriormente $(AB) \cdot A + AB$.

$$AB_{2x2} \cdot A_{2x2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 7 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 36 & -11 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$X = (AB) \cdot A + AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 36 & -11 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 + (-2) & 5 + 1 \\ 36 + 7 & -11 + 3 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{2x2} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}_{2x2}$.

2012. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCION B. EJERCICIO 3.

[2,5 puntos] Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$X \cdot A + A^3 \cdot B = A$$

Pasamos la matriz $A^3 \cdot B$ al otro lado de la ecuación realizando la operación opuesta.

$$X \cdot A + A^3 \cdot B = A \rightarrow X \cdot A = A - A^3 \cdot B$$

Como A se encuentra multiplicando a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$X \cdot A = A - A^3 \cdot B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = \left(A - A^3 \cdot B\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \rightarrow X \cdot I = \left(A - A^3 \cdot B\right) \cdot A^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \rightarrow X = \left(A - A^3 \cdot B\right) \cdot A^{-1}$$

Si realizamos la multiplicación y aplicamos la definición de matriz inversa obtendremos una ecuación más sencilla.

$$\begin{array}{lll} X = \left(A - A^3 \cdot B\right) \cdot A^{-1} & \rightarrow & X = A \cdot A^{-1} - A^3 \cdot B \cdot A^{-1} \\ \text{Como } A \cdot A^{-1} = I & \rightarrow & X = I - A^3 \cdot B \cdot A^{-1} \end{array}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = I - A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, A^3, $A^3 \cdot B$, $A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$ y posteriormente $I - A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$.

Antes de nada comprobaremos que A tiene inversa verificando que su determinante es distinto de cero, para ello calcularemos nuestra matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \cancel{0} & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 \cdot 0 - 1 \cdot 1] = -1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|}(cof\,(A))^t \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^3, A^3 \cdot B, A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$

$$A^2_{3x3} = A_{3x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 \\ 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = I_{3x3}$$

$$A^3_{3x3} = A^2_{3x3} \cdot A_{3x3} = I_{3x3} \cdot A_{3x3} = A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^3_{3x3} \cdot B_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ 0\cdot 2+1\cdot 0+0\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+1\cdot 2+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 2 \\ 1\cdot 2+0\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+0\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 0+0\cdot 2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^3_{3x3} \cdot B_{3x3} \cdot A^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & -1\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 0 \\ 0\cdot 0+2\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 0\cdot 0+2\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 1+2\cdot 0+(-1)\cdot 0 \\ 2\cdot 0+(-1)\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot 0+(-1)\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Realizamos $I - A^3 \cdot B \cdot A^{-1}$ para obtener la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-0 & 0-(-1) \\ 0-(-1) & 1-2 & 0-0 \\ 0-0 & 0-(-1) & 1-2 \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$

2012. RESERVA A. OPCION A. EJERCICIO 3.

[2,5 puntos] Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.

Despejamos la matriz X de la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot B = C^t$$

Como B se encuentra a la derecha de la matriz X, multiplicaremos por la derecha de ambos miembros de la ecuación por B^{-1}.

$$A \cdot X \cdot B = C^t \to A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = C^t \cdot B^{-1}$$

$$\text{Como } B \cdot B^{-1} = I \to A \cdot X \cdot I = C^t \cdot B^{-1}$$

$$\text{y} \quad X \cdot I = X \quad \to \quad A \cdot X = C^t \cdot B^{-1}$$

Como A se encuentra a la izquierda de la matriz X, multiplicaremos por la izquierda de ambos miembros de la ecuación por A^{-1}.

$$A \cdot X = C^t \cdot B^{-1} \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$$

$$\text{Como } A^{-1} \cdot A = I \to I \cdot X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$$

$$\text{y} \quad I \cdot X = X \to X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$$

La matriz X es la obtenida de realizar las siguientes operaciones:

$$X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$$

Para obtener la matriz pedida calcularemos A^{-1}, B^{-1} y posteriormente $A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$.

Antes de nada comprobaremos ambas matrices tienen inversa verificando que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{0} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot 1 - 0 \cdot 2] = 1 \neq 0 \to \exists A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \to \exists B^{-1}$$

Como $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$ tienen inversa, calcularemos su inversa mediante la siguiente expresión:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|}(cof\,(A))^t \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera análoga repetimos el proceso para obtener B^{-1}.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow cof\,(B) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 0 & (-1)^{1+2}\cdot 1 \\ (-1)^{2+1}\cdot 1 & (-1)^{2+2}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación la traspuesta de la matriz de cofactores o adjunta.

$$(cof\,(B))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último sustituimos en la expresión (1) para obtener la inversa pedida.

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^t y $A^{-1} \cdot C^t$

$$C^t_{3x2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$A^{-1}_{3x3} \cdot C^t_{3x2} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Realizamos $A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$ para obtener la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Solución:

La matriz pedida que cumple la ecuación dada en el enunciado es $X_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$