Bloque 2: Sistema de Ecuaiones Lineales

Discusión de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2012

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2012. TITULAR JUNIO. OPCION B. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & \lambda+1 \\ 3y+2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)\,y+z & = & \lambda \end{array}\right.$$

(a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

(b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

(c) [0,5 puntos] ¿Existe algún valor de λpara el que el sistema admite la solución $\left(\frac{-1}{2},\, 0,\, \frac{1}{2}\right)$.

(a) Sustituimos $\lambda = 1$ para obtener el sistema que debemos de resolver.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 3y+2z & = & 5 \\ 3x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 3y+2z & = & 5 \\ 3x+z & = & 1 \end{array}\right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el rango de ambas matrices para ver a que tipo de sistema nos enfrentamos. Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\, columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, y en la matriz ampliada siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 3 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 3F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [3 \cdot (-2) - (-3) \cdot 2] =$$

$$= -6 + 6 = 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_3} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & 3 & 5 \\ \cancel{0} & -3 & -5 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -4 \cdot [3 \cdot (-5) - 3 \cdot 5] =$$

$$= -4 \cdot [0] = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema en función de sus rangos.

- El $r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \\ \cancel{3x+z=1} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \end{array}\right.$$

Nuestro sistema ya se encuentra escalonado así que a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z=\theta; \forall\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 3y+2z & = & 5 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+(\theta) & = & 2 \\ 3y+2\cdot(\theta) & = & 5 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 2-\theta \\ y & = & \dfrac{5-2\theta}{3} \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+\left(\dfrac{5-2\theta}{3}\right) & = & 2-\theta \\ y & = & \dfrac{5-2\theta}{3} \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{1-\theta}{3} \\ y & = & \dfrac{5-2\theta}{3} \\ z & = & \theta \end{array}\right. , \ \forall\theta \in \mathbb{R} \ .$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{1-\theta}{3};\ \frac{5-2\theta}{3};\ \theta\right);\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

La solución del sistema para $\lambda = 1$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{1-\theta}{3} \\ y & = & \dfrac{5-2\theta}{3} \\ z & = & \theta \end{array}\right.$ $\forall\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{1-\theta}{3};\ \frac{5-2\theta}{3};\ \theta\right), \forall\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & \lambda+1 \\ 3y+2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)\,y+z & = & \lambda \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

El enunciado nos indica a que el sistema solo debe tener una única solución, por tanto nuestro sistema debe ser un Sistema Compatible Determinado, para ello buscaremos aquellos valores que provoquen que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero,$|A| \neq 0$, así nos garantizaremos que el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada coincidan con el número de incógnitas del sistema.

Calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes y la obligaremos a que sea cero, así sabremos que serán todos los valores menos los obtenido.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-3F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \lambda-4 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)-(\lambda-4)\cdot 2 = -2\lambda+2$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & -2\lambda+2 \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \quad -2\lambda+2=0 \rightarrow \quad \lambda=1$$

Solución:

Para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ nuestro sistema tendrá solución única porque $r(A)=r(A')=$ nº de incógnitas $=3$ obteniendo un Sistema Compatible Determinado.

(c) Nos preguntan si es posible encontrar una única solución para el que $(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{-1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, para resolverlo primero buscaremos aquellos valores de λ que nos garanticen los valores pedidos sustituyéndolos en nuestro sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & \lambda+1 \\ 3y+2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)\,y+z & = & \lambda \\ x & = & \dfrac{-1}{2} \\ y & = & 0 \\ z & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \left(-\dfrac{1}{2}\right)+(0)+\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & \lambda+1 \\ 3\,(0)+2\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & 2\lambda+3 \\ 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(\lambda+1)\,(0)+\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & \lambda \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 0 & = & \lambda+1 \\ 1 & = & 2\lambda+3 \\ -1 & = & \lambda \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \lambda+1 & = & 0 \\ 2\lambda+2 & = & 0 \\ \lambda & = & -1 \end{array}\right.$$

Ahora solamente debemos resolver cada una de las ecuaciones para obtener los valores del parámetro que necesitamos, en este caso debemos de resolver todas y verificar que el valor del parámetro siempre coinciden.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+1 & = & 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ 2\lambda+2 & = & 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ & & \lambda = -1 \end{array}\right.$$

Solo existe una única solución de λ para el cuál se verifica lo pedido en el enunciado y además sabemos que es solución única gracias al apartado anterior, pues $\forall\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tenemos un Sistema Compatible Determinado.

Solución:

Para $\lambda = 1$ existirá una única solución para el que $(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{-1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

2012. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCION A. EJERCICIO 3.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} kx + 2y &= 2 \\ 2x + ky &= k \\ x - y &= -1 \end{cases}$$

(a) [0,5 puntos] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
(b) [1 punto] Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
(C) [1 punto] Halla las soluciones en cada caso.

(a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\begin{cases} kx + 2y &= 2 \\ 2x + ky &= k \\ x - y &= -1 \end{cases} \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Según el teorema de Rouché-Frobenius un sistema será compatible siempre que el rango de la matriz de coeficientes coincida con el de la matriz ampliada, es decir, $r(A) = r(A')$. Como el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, para la matriz A el rango estará comprendido entre 1 y 2, mientras que para la matriz ampliada su rango estará comprendido entre 1 y 3, en consecuencia para que se cumpla la igualdad propuesta el $r(A') < 3$, para comprobarlo solamente debemos de calcular el determinante de la matriz ampliada y verificar que siempre vale cero independientemente del valor que tome k.

$$|A'| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+C_1]{C_1=C_2+C_1} \begin{vmatrix} \cancel{k} & 2+k & 2+k \\ \cancel{2} & k+2 & k+2 \\ \cancel{1} & \emptyset & \emptyset \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k+2 & k+2 \\ k+2 & k+2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A') < 3$$

Solución:

Para que nuestro sistema sea compatible el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada deben de coincidir, por tanto $r(A) = r(A') \leq 2$, es decir que el rango de la matriz ampliada nunca deba ser 3, que siempre sucede puesto que $|A'| = 0\ \forall k \in \mathbb{R}$.

(b) Por el apartado anterior sabemos que nuestro sistema siempre será compatible porque $r(A) = r(A') \leq 2$, ante esta situación para discutir el sistema sencillamente seleccionaremos un menor cualquiera de orden 2 de la matriz de coeficientes para calcularle su determinante e imponerle la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de k que deberemos estudiar.

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot k = -2 - k$$

$$\left.\begin{array}{rl} |A_2| = & -2-k \\ |A_2| = & 0 \end{array}\right| \; -2 - k = 0 \rightarrow k = -2$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $k = -2$, y $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, recordando que por el apartado anterior sabemos que $r(A) = r(A') \leq 2$.

i) Para $k = -2$.
Sustituimos el valor $k = -2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A simple vista nos damos cuenta $F_1 = -2 \cdot F_3$ y $F_2 = 2 \cdot F_3$, por tanto ambas filas son combinación lineal respecto de la F_3 y solamente existe una fila linealmente independiente y en consecuencia en rango de ambas matrices es 1.

$$r(A) = r(A') = 1$$

ii) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Si nuestro parámetro toma un valor distinto de $k = -2$ sabemos que al menos existe un menor de orden 2 cuyo determinantes es distinto de cero en ambas matrices, recuerda que la matriz A está contenida en A', $A \subset A'$, por tanto en este caso el rango de ambas matrices es 2.

$$r(A) = r(A') = 2$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $k = -2 \rightarrow r(A) = r(A') = 1 <$ nº de incógnitas $= 2$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow r(A) = r(A') = 2$, tenemos un Sistema Compatible Determinado con solución única.

(c) Resolveremos el sistema para $k = -2$ y $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ al ser los valores del parámetro que nos garantizan que sea Sistema Compatible Indeterminado y Determinado.
i) Para $k = -2$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), para el cual el rango de la matriz de coeficientes es 1, así que sencillamente eliminados dos de las tres ecuaciones de las que disponemos, para posteriormente imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma.

$$\left\{ \begin{array}{c} \cancel{-2x + 2y = 2} \\ \cancel{2x - 2y = -2} \\ x - y = -1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \, x - y = -1 \right.$$

Le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $y = \theta; \forall \theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - y & = & -1 \\ y & = & \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x - (\theta) & = & -1 \\ y & = & \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & \theta - 1 \\ y & = & \theta \end{array} \right. , \ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x, y) = (\theta - 1; \theta)$; $\forall \theta \in \mathbb{R}$

ii) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, por el apartado anterior sabemos que se trata de un Sistema Compatible Determinado $r(A) = r(A') = 2$, así que eliminamos una de las ecuaciones, preferiblemente la que no esté contenida en el menor de orden 2 que usamos en el apartado (b) y posteriormente resolveremos por el método de Cramer.
Reescribimos nuestro sistema en forma matricial $AX = B$

$$\left\{ \begin{array}{c} \cancel{kx + 2y = 2} \\ 2x + ky = k \\ x - y = -1 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los valores de x, y y z se definen como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{k \cdot (-1) - (-1) \cdot k}{2 \cdot (-1) - 1 \cdot k} = \frac{0}{-2 - k} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot k}{2 \cdot (-1) - 1 \cdot k} = \frac{-2 - k}{-2 - k} = 1$$

Solución:

La solución del sistema para $k = -2$ es $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & \theta - 1 \\ y & = & \theta \end{array} \right.$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y) = (\theta - 1; \theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Mientras que para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ es $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$ o $(x, y) = (0; 1)$.

2012. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCION B. EJERCICIO 3.

Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& \lambda \\ 2\lambda y+\lambda z &=& \lambda \\ -x-y+\lambda z &=& 0 \end{array}\right.$$

(a) [1,25 puntos] Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
(b) [1,25 puntos] Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

(a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& \lambda \\ 2\lambda y+\lambda z &=& \lambda \\ -x-y+\lambda z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro λ en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de λ que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 2\lambda & \lambda \\ \cancel{0} & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2\lambda \cdot \lambda - (-2) \cdot (\lambda) = 2\lambda^2 + 2\lambda = 2\lambda \cdot (\lambda + 1)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A| = & 2\lambda \cdot (\lambda+1) \\ |A'| = & 0 \end{array}\right| \; 2\lambda \cdot (\lambda+1) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 \\ 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r\left(M\right) \leq min\left\{filas,\ column$ en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero para los casos en los que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1 \leq r\left(A\right) \leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, por tanto para dichos casos solo buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r\left(A\right) \leq r\left(A'\right) \leq 3$.

i) Para $\lambda_1 = -1$.

Sustituimos el valor $\lambda = -1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r\left(A\right) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r\left(A\right) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \neq 0 \rightarrow r\left(A\right) = 2$$

- Rango de A': $r\left(A'\right) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r\left(A\right) \leq r\left(A'\right) \leq 3 \\ 2 \leq r\left(A'\right) \leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r\left(A'\right) = 2$, mientras que si es distinto de cero $r\left(A'\right) = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & -2 & -1 \\ \cancel{0} & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r\left(A'\right) = 2$$

ii) Para $\lambda_2 = 0$.

Sustituimos el valor $\lambda = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nos fijamos bien la matriz nos encontramos ante un caso particular puesto que la última columna de la matriz ampliada esta totalmente llena de ceros, en esta situación sabemos que el rango de ambas matrices siempre coincidirá, $r(A) = r(A')$ porque todos los menores de orden 3 que busquemos distintos de la matriz A contendrán dicha columna y su determinante siempre valdrá cero porque por las propiedades de los determinantes sabemos que siempre que contenga una fila o columna llena de ceros su determinante vale cero.

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = -2 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

- Rango de A': $r(A') = 2$, por lo anteriormente expuesto.

iii) Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Si nuestro sistema toma valores distintos de $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

(b) Para $\lambda = -1$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -2y-z=-1 \\ \cancel{-x-y-z=0} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -2y-z=-1 \end{array}\right.$$

Nuestro sistema ya se encuentra escalonada, así que a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $y = \theta; \forall\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y & = & -1 \\ y & = & \theta \\ -2y-z & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-(\theta) & = & -1 \\ y & = & \theta \\ -2\cdot(\theta)-z & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \theta-1 \\ y & = & \theta \\ z & = & 1-2\theta \end{array}\right. ,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (\theta-1;\ \theta;\ 1-2\theta)\ ;\ \forall\theta \in \mathbb{R}$

Mientras que para $\lambda = 0$, nos encontramos en el mismo caso que el anterior.

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=0 \\ 0=0 \\ -x-y=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-y=0 \\ -x-y=0 \end{array}\right.$$

Podríamos resolverlo como antes pero si observamos detenidamente nos percatamos de que nuestro sistema es homogéneo (No hay termino independiente) y que una de las incógnitas no aparece en nuestro sistema, en consecuencia la variable que no aparece le impondremos un parámetro y el resto de variables siempre son ceros, para nuestro caso $z = \gamma; \forall\gamma \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & \gamma \end{array}\right. ,\ \forall\gamma \in \mathbb{R}$, pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (0;\ 0;\ \gamma)\ ;\ \forall\gamma \in \mathbb{R}$

Solución:

La solución del sistema para $\lambda = -1$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \theta-1 \\ y & = & \theta \\ z & = & 1-2\theta \end{array}\right.$ $\forall\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (\theta-1;\ \theta;\ 1-2\theta)\ , \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Mientras que para $\lambda = 0$ es $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & \gamma \end{array}\right. ,\ \forall\gamma \in \mathbb{R}$ o expresado de forma alternativa como $(x,\ y,\ z) = (0;\ 0;\ \gamma)\ ;\ \forall\gamma \in \mathbb{R}$.

2012. SUPLENTE JUNIO. OPCION A. EJERCICIO 3.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+ky+2z & = & k+1 \\ x+2y+kz & = & 3 \\ (k+1)\,x+y+z & = & k+2 \end{array}\right.$$

(a) [1,25 puntos] Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.
(b) [0,5 puntos] ¿Existe algún valor de k para el cual sl sistema no tienen solución?
(c) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $k=0$.

Para resolver el apartado (a) y (b) previamente discutiremos el sistema, para ello transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+ky+2z & = & k+1 \\ x+2y+kz & = & 3 \\ (k+1)\,x+y+z & = & k+2 \end{array}\right. \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & k+2 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro k en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de k que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 + k\cdot k\cdot (k+1) - (k+1)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot k\cdot 1 - 1\cdot k\cdot 1 =$$

$$= k^3+k^2-6k = k\cdot\left(k^2+k-6\right)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A| = & k\cdot\left(k^2+k-6\right) \\ |A'| = & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} k\cdot\left(k^2+k-6\right)=0 \\ k_2=0 \\ k^2+k-6=0 \rightarrow k = \dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \left\{\begin{array}{r} k_1=-3 \\ k_3=2 \end{array}\right. \end{array}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $k_1=-3$, $k_2=0$, $k_3=2$ y $\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-3,\ 0,\ 2\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero para los casos en los que $k_1 = -3$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 2$ el rango de la matriz A se encontrará entre $1 \leq r(A) \leq 2$ puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, por tanto para dichos casos solo buscaremos menores de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

i) Para $k_1 = -3$.

Sustituimos el valor $k = -3$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq r(A) \leq 2$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 5 \neq 0 \to r(A) = 2$$

- Rango de A': $r(A') = 2$

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

  Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

  $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + 2F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{-2} \\ \cancel{0} & 5 & 5 \\ \cancel{0} & -5 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \to r(A') = 2$$

ii) Para $k_2 = 0$.

Sustituimos el valor $k = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \le r(A) \le 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2 \neq 0 \to r(A) = 2$$

- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \le r(A') \le 3 \\ 2 \le r(A') \le 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 2 & 2 \\ \cancel{0} & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to r(A') = 2$$

iii) Para $k_3 = 2$.

Sustituimos el valor $k = 2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \le r(A) \le 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5 \neq 0 \to r(A) = 2$$

- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Mediante el método del orlado buscamos un menor de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Si un determinante tiene dos filas o columnas} \\ \text{iguales su determinante vale cero.} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\ 0,\ 2\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $k_1 = -3$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 2$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema en función de sus rangos.

- Para $k_1 = -3$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 2$, el $r(A) = r(A') <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.

- Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\ 0,\ 2\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

(a)

Solución:

Nuestro sistema tendrá infinitas soluciones para $k_1 = -3$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 2$ que provocarán que tengamos un Sistema Compatible Indeterminado.

(b)

Solución:

No es posible determinar ningún valor para que el sistema no tenga solución porque para que ocurra deberemos tener un Sistema Incompatible y nuestro sistema siempre es un Sistema Compatible.

(c) Para $k = 0$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_3) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} x+2z=1 \\ x+2y=3 \\ \cancel{x+y+z=2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2z=1 \\ x+2y=3 \end{array}\right.$$

Ya tenemos escalonado el sistema así que a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $x = \theta; \forall \theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ x+2y & = & 3 \\ x+2z & = & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ (\theta)+2y & = & 3 \\ (\theta)+2z & = & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ (\theta)+2y & = & \dfrac{3-\theta}{2} \\ (\theta)+2z & = & \dfrac{1-\theta}{2} \end{array}\right. , \ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = \left(\theta;\ \frac{3-\theta}{2};\ \frac{1-\theta}{2}\right);\ \forall \theta \in \mathbb{R}$

Solución:

Para $k = 0$ la solución del sistema es $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \theta \\ y & = & \dfrac{3-\theta}{2} \\ z & = & \dfrac{1-\theta}{2} \end{array}\right.$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = \left(\theta;\ \frac{3-\theta}{2};\ \frac{1-\theta}{2}\right), \forall \theta \in \mathbb{R}$.

2012. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCION A. EJERCICIO 3.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+(k+1)\,y+2z & = & -1 \\ kx+y+z & = & 2 \\ x-2y-z & = & k+1 \end{array}\right.$$

(a) [1,75 puntos] Clasifícalo según los distintos valores de k.
(b) [0,75 puntos] Resuélvelo para el caso $k=2$.

(a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+(k+1)\,y+2z & = & -1 \\ kx+y+z & = & 2 \\ x-2y-z & = & k+1 \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro k en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de k que deberemos estudiar, esto es debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+C_1]{C_2=C_2+2C_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & k+3 & 3 \\ \cancel{k} & 1+2k & 1+k \\ \cancel{1} & \emptyset & \emptyset \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} k+3 & 3 \\ 1+2k & 1+k \end{vmatrix} =$$

$$=(k+3)\cdot(1+k)-(1+2k)\cdot 3=k^2-2k=k\cdot(k-2)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & k\cdot(k-2) \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \quad k\cdot(k-2)=0\left\{\begin{array}{r} k_1=0 \\ k-2=0\rightarrow k_2=2 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $k_1=0, k_2=2$ y $\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ 2\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas, columnas\}$ en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall k \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro m toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de k aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $k_1 = 0$.
Sustituimos el valor $k = 0$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + 2F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & -1 & 3 \\ \cancel{0} & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -8 \neq 0 \rightarrow$$
$r(A') = 3$

ii) Para $k_2 = 2$.
Sustituimos el valor $k = 2$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{F_1=F_1-2F_2} \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & -5 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{0} & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $k = 0 \rightarrow r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $k = 2 \rightarrow r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

(b) Para $k = 2$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{x+3y+2z=-1} \\ 2x+y+z=2 \\ x-2y-z=3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y-z=3 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y-z=3 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-2y-z & = & 3 \\ 5y+3z & = & -4 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta; \forall\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y-z & = & 3 \\ 5y+3z & = & -4 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-2y-(\theta) & = & 3 \\ 5y+3\cdot(\theta) & = & -4 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-2y & = & 3+\theta \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-2\cdot\left(\dfrac{-4-3\theta}{5}\right) & = & 3+\theta \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{7-\theta}{5} \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right. , \ \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\, y,\, z) = \left(\frac{7-\theta}{5};\ \frac{-4-3\theta}{5};\ \theta\right);\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

La solución del sistema para $k = 2$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{7-\theta}{5} \\ y & = & \dfrac{-4-3\theta}{5} \\ z & = & \theta \end{array}\right.$ $\forall\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x,\, y,\, z) = \left(\frac{7-\theta}{5};\ \frac{-4-3\theta}{5};\ \theta\right), \forall\theta \in \mathbb{R}$.

2012. RESERVA A. OPCION B. EJERCICIO 3.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx + 2y &= 3 \\ -x + 2kz &= -1 \\ 3x - y - 7z &= k+1 \end{cases}$$

(a) [1,75 puntos] Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k.

(b) [0,75 puntos] Resuélvelo para $k = 1$.

---

a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\begin{cases} kx + 2y &= 3 \\ -x + 2kz &= -1 \\ 3x - y - 7z &= k+1 \end{cases} \rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro k en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de k que deberemos estudiar, esto debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 = F_1 + 2F_3} \begin{vmatrix} k+6 & \cancel{0} & -14 \\ -1 & \cancel{0} & 2k \\ \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{-7} \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} k+6 & -14 \\ -1 & 2k \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(k+6) \cdot 2k - (-1) \cdot (-14)] = 2k^2 + 12k - 14 = 2 \cdot \left(k^2 + 6k - 7\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl} |A| = & 2 \cdot \left(k^2 + 6k - 7\right) \\ |A'| = & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} 2 \cdot \left(k^2 + 6k - 7\right) = 0 \\ 2 \neq 0 \\ k = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} k_1 = -7 \\ k_2 = 1 \end{cases} \end{array}$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $k_1 = -7$, $k_2 = 1$ y $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-7,\, 1\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - 3\cdot 0 = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall k \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para los casos en los que $k_1 = -7$ y $k_2 = 1$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para los casos $k_1 = -7$ y $k_2 = 1$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro k toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de k aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $k_1 = -7$.
Sustituimos el valor $k = -7$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -14 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -14 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{array}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1+2F_3} \begin{vmatrix} -1 & \cancel{0} & -9 \\ -1 & \cancel{0} & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{-6} \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-9)] = -8 \neq 0 \rightarrow r(A') = 3$$

ii) Para $k_2 = 1$.
Sustituimos el valor $k = 1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1+2F_3} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{Si un determinante tiene dos filas o columnas} \\ \text{proporcionales su determinante vale cero, } F_1 = -7F_2. \end{bmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2$$

iii) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-7,\ 1\}$.
Si nuestro sistema toma valores distintos de $k_1 = -7$ y $k_2 = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r(A) = r(A') = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $k = -7 \to r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $k = 1 \to r(A) = 2 \neq r(A') = 3$, tenemos un Sistema Incompatible, para el cual no podemos determinar ninguna solución.
- Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 1\} \to r(A) = r(A') =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

b) Para $k = 1$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r(A)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_1) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{r} \cancel{x+2y=3} \\ -x+2z=-1 \\ 3x-y-7z=2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} -x+2z=-1 \\ 3x-y-7z=2 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema obtenido por Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{r} -x+2z=-1 \\ 3x-y-7z=2 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+3F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{rcr} -x+2z & = & -1 \\ -y-z & = & -1 \end{array}\right.$$

Una vez escalonado el sistema a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta; \forall\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x+2z & = & -1 \\ -y-z & = & -1 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} -x+2\cdot(\theta) & = & -1 \\ -y-(\theta) & = & -1 \\ z & = & \theta \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+2\theta \\ y & = & 1-\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right., \ \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x, y, z) = (1+2\theta;\ 1-\theta;\ \theta)$; $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

La solución del sistema para $k = 1$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+2\theta \\ y & = & 1-\theta \\ z & = & \theta \end{array}\right.$ $\forall\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (1+2\theta;\ 1-\theta;\ \theta)$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

2012. RESERVA B. OPCION B. EJERCICIO 3.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+kz &=& 1 \\ 2x+ky &=& 1 \\ y+2z &=& k \end{array}\right.$$

(a) [1 punto] Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.
(b) [0,75 puntos] Resuélvelo para $k=1$.
(c) [0,75 puntos] Resuélvelo para $k=-1$.

(a) Transformamos el sistema de ecuaciones en la matriz $(A|B)$, de la cual obtendremos la matriz de coeficientes que denotaremos como A, constituida por los coeficientes que acompañan a cada una de las variables y la matriz ampliada A', que la formaremos añadiendo a la matriz de coeficientes la matriz columna B.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+kz &=& 1 \\ 2x+ky &=& 1 \\ y+2z &=& k \end{array}\right. \rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Al aparecer el parámetro k en la matriz A, calcularemos su determinante y le impondremos la condición de que sea cero para determinar, en caso de que existan, los diferentes valores de k que deberemos estudiar, esto debido a que si una matriz posee alguna combinación lineal su determinante vale cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{k} \\ \cancel{0} & k-2 & -2k \\ \cancel{0} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} k-2 & -2k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot[(k-2)\cdot 2-1\cdot(-2k)]=4k-4=4\cdot(k-1)$$

$$\left.\begin{array}{rc} |A|= & 4\cdot(k-1) \\ |A'|= & 0 \end{array}\right| \quad 4\cdot(k-1)=0\left\{\begin{array}{r} 4\neq 0 \\ k-1=0\rightarrow k=1 \end{array}\right.$$

A continuación estudiaremos el rango de las matrices A y A' mediante determinantes, para los casos: $k=1$ y $\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Pero no sin antes detenernos en cada una de las matrices por si pudiéramos determinar su rango para alguno de los casos.

Sabemos que el rango de una matriz no nula siempre irá comprendido entre $1 \leq r(M) \leq min\{filas,\ columnas\}$, en ambas matrices estará comprendido entre 1 y 3, pero si observamos detenidamente la matriz A nos damos cuenta que existe un menor de orden 2 que no depende de dicho parámetro cuyo determinante es distinto de cero, garantizándonos que su rango mínimo para cualquiera de los casos en siempre 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2;\ \forall k \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para $k = 1$ el $r(A) = 2$, puesto que el único menor de orden 3 que posee es la propia matriz A del cual sabemos que para dichos valores su determinante es cero, lo obligamos al principio del ejercicio, mientras que si toma valores distintos su rango será máximo al ser el $|A| \neq 0$, que en nuestro caso $r(A) = 3$.

Si nos fijamos ahora en la matriz ampliada nos damos cuenta que dentro de ella siempre esta la matriz A, es decir $A \subset A'$,por tanto los mismos menores que hemos usado para determinar el rango de A los podemos encontrar en A', llegando a la conclusión que $r(A) \leq r(A') \leq 3$, así pues para $k = 1$ solamente deberemos buscar menores de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, mientras que si el parámetro k toma valores diferentes sabemos que $r(A') = 3$.

Solamente necesitamos estudiar los rangos de la matriz ampliada para los diferentes casos de k aunque dejaremos indicado el $r(A)$ en cada uno de ellos.

i) Para $k = 1$.
Sustituimos el valor $k = 1$ en el sistema de ecuaciones lineales obtendremos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rango de A: $r(A) = 2$, explicado anteriormente.
- Rango de A': $r(A') = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \subset A' \\ r(A) \leq r(A') \leq 3 \\ 2 \leq r(A') \leq 3 \end{matrix}$$

Estudiaremos su rango usando el método del orlado, para ello buscaremos menores de orden 3 distinto de la matriz A que contenga el menor de orden 2 usado anteriormente, que solamente hay uno, si su determinante es cero $r(A') = 2$, mientras que si es distinto de cero $r(A') = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Si un determinante tiene dos filas o columnas} \\ \text{iguales su determinante vale cero, } C_2 = C_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow r\left(A'\right) = 2$$

ii) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Si nuestro sistema toma valores distintos de $k = 1$ sabemos que el $|A| \neq 0$, dando lugar a que exista un menor de orden 3 cuyo determinante es distinto de cero tanto en A como en A', puesto que $A \subset A'$. Ambas matrices tendrán rango máximo, en consecuencia

$$r\left(A\right) = r\left(A'\right) = 3$$

Solución:

Terminamos el apartado, usando el teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el tipo de sistema en función de los rangos:

- Para $k = 1 \rightarrow r\left(A\right) = r\left(A'\right) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, posee infinitas soluciones con una grado de libertad.
- Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow r\left(A\right) = r\left(A'\right) =$ nº de incógnitas $= 3$, tenemos un Sistema Compatible Determinado, tiene una única solución para cada una de las incógnitas.

(b) Para $k = 1$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (restamos a el número de incógnitas el rango de la matriz de coeficientes, nº de incógnitas $- r\left(A\right)$), por lo tanto debemos eliminar una de las ecuaciones (eliminaremos la fila que no pertenece al menor de orden 2 que usamos en el apartado a), en este caso F_2) para posteriormente escalonar el sistema e imponerle a una de las incógnitas un parámetro. Quedando el sistema bajo la forma

$$\left\{ \begin{array}{r} x+y+z=1 \\ \cancel{2x+y=1} \\ y+2z=1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+2z=1 \end{array} \right.$$

Ya tenemos nuestro sistema escalonado, a una de las incógnitas le impondremos un parámetro, por ejemplo para nuestro caso $z = \theta; \forall\theta \in \mathbb{R}$, quedando el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+2z & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+(\theta) & = & 1 \\ y+2\cdot(\theta) & = & 1 \\ z & = & \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x+y & = & 1-\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x+(1-2\theta) & = & 1-\theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & \theta \\ y & = & 1-2\theta \\ z & = & \theta \end{array} \right. , \ \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Pudiendo expresarse también como $(x,\ y,\ z) = (\theta;\ 1-2\theta;\ \theta)\ ;\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

La solución del sistema para $k = 1$ es $\begin{cases} x &= 1+2\theta \\ y &= 1-\theta \\ z &= \theta \end{cases}$ $\forall\theta \in \mathbb{R}$ o también la podemos expresar como $(x, y, z) = (1+2\theta;\ 1-\theta;\ \theta)\,, \forall\theta \in \mathbb{R}$.

(c) Para $k = -1$, por el apartado anterior, sabemos que se trata de un Sistema Compatible Determinado con una única solución para cada incógnita, sustituimos el valor del parámetro dado para obtener el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y &= 1 \\ y+2z &= -1 \end{cases}$$

Para resolverlo podemos optar principalmente por dos métodos:

i) Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan: Escalonaremos el sistema para obtener la solución.

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y &= 1 \\ y+2z &= -1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=\frac{1}{8}F_3}$$

$$\xrightarrow{F_3=\frac{1}{8}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_3]{F_1=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2}$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= 0 \\ z &= -\frac{1}{2} \end{cases} \text{,pudiendo expresarse también como } (x,\ y,\ z) = \left(\tfrac{1}{2};\ 0;\ -\tfrac{1}{2}\right)$$

ii) Por la regla de Cramer: Mediante una división de determinantes.

Si reescribimos nuestro sistema en forma matricial $AX = B$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y-z & = & 1 \\ 2x-y & = & 1 \\ y+2z & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los valores de x, y y z se definen como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-8} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Solución:

La solución del sistema para $k = -1$ es $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{1}{2} \\ y & = & 0 \\ z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ o también la podemos expresar como $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ -\frac{1}{2}\right)$.