Bloque 4: Análisis

Problemas de Optimización 2011

Mr.Wh1t3

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo "porque no ayudas a más gente" y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

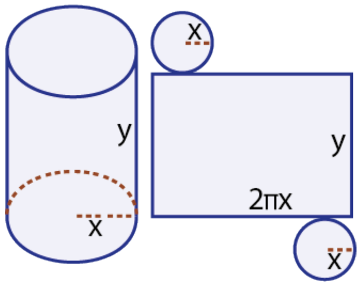
Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. TITULAR JUNIO. OPCION A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Realizamos un boceto para poder definir el depósito cilíndrico pedido.



F. Objetivo: Volumen máximo, para determinarlo usaremos el volumen de un cilindro.

$$V(x,\, y) = \pi \cdot x^2 \cdot y$$

Restricción: Su área sea de 54 m^2, al ser cerrado debemos de contabilizar ambas tapas, aplicamos la expresión del área de un cilindro.

$$54 = 2 \cdot \left(\pi \cdot x^2\right) + 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y$$

$$27 = \pi x^2 + \pi x y$$

De la restricción despejamos la variable y, para posteriormente sustituirla en la función objetivo.

$$27 = \pi x^2 + \pi x y;\ 27 - \pi x^2 = \pi x y;\ y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} \to V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot \frac{27 - \pi x^2}{\pi x}$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Calculamos $V'(x)$.

$$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} = x \cdot \left(27 - \pi x^2\right) = 27x - \pi x^3$$

$$V'(x) = 27 - 3 \cdot \pi x^2$$

Imponemos la condición $V'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} V'(x) & = & 27 - 3 \cdot \pi x^2 \\ V'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; 27 - 3 \cdot \pi x^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$27 - 3 \cdot \pi x^2 = 0; \;\; 27 = 3 \cdot \pi x^2; \;\; \pi x^2 = \frac{27}{3}$$

$$x^2 = \frac{9}{\pi} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{\pi}} = \left[\begin{array}{c} \text{Aplicamos propiedades de las raices} \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{\dfrac{9}{\pi}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \end{array}\right] = \begin{cases} x_1 = & -\dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \\ x_2 = & \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas, rechazamos $x_1 = -\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ al ser negativa, las dimensiones del radio de un cilindro no puede tomar valores negativos, aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ sea un máximo.

$$V'(x) = 27 - 3 \cdot \pi x^2$$

$$V''(x) = 0 - 2 \cdot 3 \cdot \pi x = -6\pi x$$

$$V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}} = -\frac{18\pi}{\sqrt{\pi}} < 0$$

Por tanto para $x = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la altura de nuestro cilindro.

Para $x = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \rightarrow y = \dfrac{27 - \pi \cdot \left(\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{\pi \cdot \left(\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\right)} = \dfrac{27 - \cancel{\pi} \cdot \dfrac{9}{\cancel{\pi}}}{\dfrac{3\pi}{\sqrt{\pi}}} = \dfrac{18}{\dfrac{3\pi}{\sqrt{\pi}}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{\pi}}{\pi}$

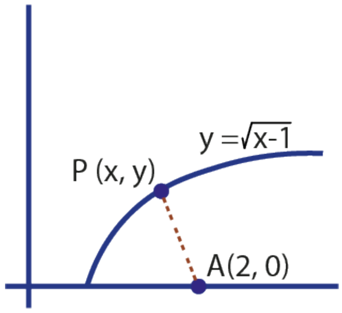
Solución:

El radio y la altura del depósito cilíndrico que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\,m$ y $\dfrac{6 \cdot \sqrt{\pi}}{\pi}\,m$ respectivamente.

2011. TITULAR JUNIO. OPCION B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2, 0)$. ¿Cuál es esa distancia?

Realizamos un boceto.



F. Objetivo: Distancia mínima, siendo la distancia entre dos puntos el módulo del vector que los une.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x-2,\ y-0)$$
$$D(x, y) = \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

Restricción: Es la propia función debido a que el punto P pertenece a la propia función.

$$y = \sqrt{x-1}$$

Al tener en la restricción despejada la variable y directamente la sustituimos en la función objetivo.

$$y = \sqrt{x-1} \to D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2}$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Calculamos $D'(x)$.

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \sqrt{x^2+4-4x+(x-1)} = \sqrt{x^2-3x+3}$$

$$D'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}}\cdot(2x-3) = \frac{2x-3}{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}}$$

Imponemos la condición $D'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = & \dfrac{2x-3}{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}} \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad \frac{2x-3}{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{2x-3}{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}} = 0;\;\; 2x-3=0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \dfrac{3}{2}$ sea un máximo.

$$A'(x) = \frac{2x-3}{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+3}}$$

$$A''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2\cdot\sqrt{x^2-3x+3}-(2x-3)\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}\cdot\sqrt{x^2-3x+3}}\cdot(\cancel{2}-0)}{\left(\sqrt{x^2-3x+3}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x^2-3x+3}-\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+3}}}{x^2-3x+3}\right) =$$

$$A''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot\left(x^2-3x+3\right)-2x-3}{\left(x^2-3x+3\right)\cdot\sqrt{x^2-3x+3}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x^2-8x+3}{\left(x^2-3x+3\right)\cdot\sqrt{x^2-3x+3}}\right)$$

$$A''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-8\cdot\dfrac{3}{2}+3}{\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-3\cdot\dfrac{3}{2}+3\right)\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-3\cdot\dfrac{3}{2}+3}}\right) > 0$$

Por tanto para $x = \dfrac{3}{2}$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la función distancia que solo depende de la variable x para poder determinarla.

Para $x = \dfrac{3}{2} \to D\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{3}{2} + 3} = \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 3} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

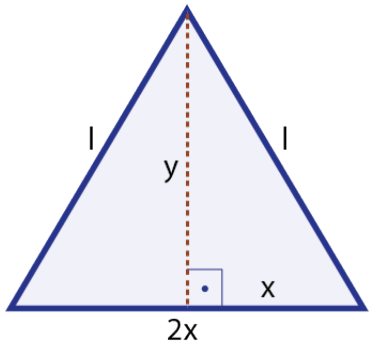
Solución:

La distancia mínima con las condiciones impuestos en el enunciado es de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\, u$.

2011. TITULAR SEPTIEMBRE. OPCION A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Realizamos un boceto para poder definir el triangulo isósceles pedido.



Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

F. Objetivo: Área máxima del triángulo, para determinarlo usaremos al área de un triangulo.

$$A(x,\ y) = \frac{2x \cdot y}{2} = x \cdot y$$

Restricción: Su perímetro sea 8 unidades, aplicamos el teorema de Pitágoras para determinar el valor de los lados iguales del triángulo en función de la base y la altura y así obtener el perímetro en función de ellas.

$$8 = 2x + l + l;\ 8 = 2x + 2l;\ \ 4 = x + l$$

$$4 = x + l \ \text{ como } l^2 = x^2 + y^2 \to l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

De la restricción despejamos la variable y, para ello aislaremos la raíz cuadrada y elevaremos al cuadrado cada miembro de la igualdad, para posteriormente sustituirla en la función objetivo.

$$4 = x + \sqrt{x^2 + y^2};\ (4 - x)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2;\ \cancel{x^2} - 8x + 16 = \cancel{x^2} + y^2;\ y = \sqrt{16 - 8x} \to A(x) = x \cdot \sqrt{16 - 8x}$$

Calculamos $A'(x)$.

$A(x) = x \cdot \sqrt{16-8x}$

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{16-8x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{16-8x}} \cdot (-8) = \sqrt{16-8x} - \frac{4x}{\sqrt{16-8x}}$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = & \sqrt{16-8x} - \dfrac{4x}{\sqrt{16-8x}} \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \sqrt{16-8x} - \frac{4x}{\sqrt{16-8x}} = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\sqrt{16-8x} - \frac{4x}{\sqrt{16-8x}} = 0; \;\; \sqrt{16-8x} = \frac{4x}{\sqrt{16-8x}}; \;\; \left(\sqrt{16-8x}\right) \cdot \left(\sqrt{16-8x}\right) = 4x$$

$$\left(\sqrt{16-8x}\right)^2 = 4x; \;\; 16-8x = 4x \to 12x = 16 \to x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \frac{4}{3}$ sea un máximo.

$$A'(x) = \sqrt{16-8x} - \frac{4x}{\sqrt{16-8x}}$$

$$A''(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{16-8x}} \cdot (-8) - \frac{4 \cdot \sqrt{16-8x} - 4x \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{16-8x}} \cdot (-8)}{\left(\sqrt{16-8x}\right)^2} =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{16-8x}} - \frac{4\sqrt{16-8x} + \dfrac{16x}{\sqrt{16-8x}}}{16-8x}$$

$$A''\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{\sqrt{16-8 \cdot \dfrac{4}{3}}} - \frac{4\sqrt{16-8 \cdot \dfrac{4}{3}} + \dfrac{16 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{16-8 \cdot \frac{4}{3}}}}{16-8 \cdot \dfrac{4}{3}} = -\frac{4}{\sqrt{\dfrac{16}{3}}} - \frac{4\sqrt{\dfrac{16}{3}} + \dfrac{\frac{192}{3}}{\sqrt{\frac{16}{3}}}}{\dfrac{16}{3}} < 0$$

Por tanto para $x = \frac{4}{3}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la altura de nuestro triángulo.

Para $x = \frac{4}{3} \to y = \sqrt{16 - 8 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

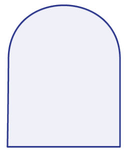
La base de nuestro triángulo es $2x$, por tanto para $x = \frac{4}{3}$ nuestra base es de $2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Solución:

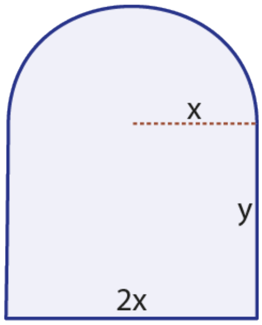
La base y la altura del triángulo isósceles que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son $\frac{8}{3}$ y $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ respectivamente.

2011. SUPLENTE JUNIO. OPCION A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.
De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.



Definimos en el dibujo dado las variables, como el radio de mi semicírculo es la mitad que la base del rectángulo para facilitar el calculo tomaremos como la base $2x$ (Es recomendable en figuras simétricas).



F. Objetivo: Área máxima de la figura, para determinarlo usaremos el área de un rectángulo y de un semicírculo.

$$A\left(x,\ y\right) = 2x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot x^2\right)$$

Restricción: Su perímetro sea 10 metros, aplicamos las expresiones del perímetro de un rectángulo y un semicírculo.

$$10 = 2x + y + y + \frac{1}{2} \cdot \left(2\pi \cdot x\right)$$

$$10 = 2x + 2y + \pi x$$

De la restricción despejamos la variable y, para sustituirla en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''\left(x\right)$:
  - Si $f''\left(a\right) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''\left(a\right) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$10 = 2x + 2y + \pi x;\ 10 - 2x - \pi x = 2y;\ \ y = \frac{10 - 2x - \pi x}{2} \rightarrow A\left(x\right) = 2x \cdot \left(\frac{10 - 2x - \pi x}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot x^2\right)$$

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = 2x \cdot \left(\frac{10-2x-\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot x^2\right) = 10x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot x^2\right)$$

$$A'(x) = 10 - 2 \cdot 2x - 2 \cdot \pi x + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \pi x = 10 - 4x - \pi x$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcc} A'(x) & = & 10-4x-\pi x \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad 10 - 4x - \pi x = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$10 - 4x - \pi x = 0;\;\; 10 = 4x + \pi x;\;\; 10 = x \cdot (4+\pi) \rightarrow x = \frac{10}{4+\pi}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ sea un máximo.

$$A'(x) = 10 - 4x - \pi x \rightarrow A''(x) = 0 - 4 - \pi = -4 - \pi$$

$$A''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = -4 - \pi < 0$$

Por tanto para $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la variable y.

$$\text{Para } x = \frac{10}{4+\pi} \rightarrow y = \frac{10 - 2 \cdot \dfrac{10}{4+\pi} - \pi \cdot \dfrac{10}{4+\pi}}{2} = 5 - \frac{10}{4+\pi} - \frac{5\pi}{4+\pi}$$

La base de nuestra ventana normanda es $2x$, por tanto para $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ nuestra base es de $2 \cdot \dfrac{10}{4+\pi} = \dfrac{20}{4+\pi}$

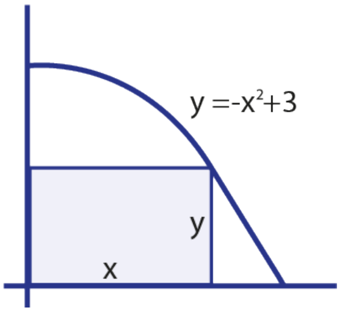
Solución:

Las dimensiones de la ventana que cumplen con las condiciones indicadas en el enunciado son un rectángulo con una base de $\dfrac{20}{4+\pi}\,m$ y una altura de $5 - \dfrac{10}{4+\pi} - \dfrac{5\pi}{4+\pi}\,m$ coronada con un semicírculo de radio $\dfrac{10}{4+\pi}\,m$.

2011. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCION B. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que si área sea máxima.

Realizamos un boceto para poder definir el rectángulo.



F. Objetivo: Área máxima del rectángulo, usaremos las expresiones del la área de un rectángulo.

$$A(x, y) = x \cdot y$$

Restricción: Es la propia función debido a que el vértice opuesto se encuentra en la propia parábola, al avanzar x el valor de la altura del rectángulo se obtendrá sustituyéndola en la función dada.

$$y = -x^2 + 3$$

Al tener en la restricción despejada la variable y directamente la sustituimos en la función objetivo.

$$y = -x^2 + 3 \rightarrow A(x) = x \cdot \left(-x^2 + 3\right)$$

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''(x)$:
  - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = x \cdot \left(-x^2 + 3\right) = -x^3 + 3x$$

$$A'(x) = -3x^2 + 3 = 3 \cdot \left(1 - x^2\right)$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = & 3 \cdot \left(1 - x^2\right) \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \; 3 \cdot \left(1 - x^2\right) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3 \neq 0 \text{ no vale} \\ 1 - x^2 = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$1 - x^2 = 0; \;\; x^2 = 1; \;\; x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

De las dos soluciones posibles descartamos $x = -1$ porque el enunciado nos indica que el rectángulo se encuentra en el primer cuadrante por tanto solo pueden ser correctas las positivas, a continuación aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = 1$ sea un máximo.

$$A'(x) = -3x^2 + 3$$

$$A''(x) = 2 \cdot (-3)\, x^{2-1} + 0 = -6x$$

$$A''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0$$

Por tanto para $x = 1$ tenemos nuestro máximo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la otra variable.

Para $x = 1 \rightarrow y = -(1)^2 + 3 = 2$

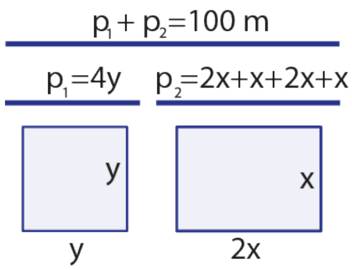
Solución:

Las dimensiones del que cumple con las condiciones impuestos en el enunciado son 1 u de base y 2 u de altura.

2011. RESERVA A. OPCION A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Un alambre 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos de construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es el doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

Realizamos un boceto para poder definir el cuadrado y rectángulo.



F. Objetivo: Suma de las áreas sea mínima, usaremos las expresiones de las áreas de un cuadrado y de un rectángulo.

$$S\left(x,\ y\right) = y^2 + 2x \cdot x = y^2 + 2x^2$$

Restricción: La suma del perímetro de ambas figuras debe ser 100 m.

$$\begin{gathered} 100 = p_1 + p_2 \text{ siendo} \\ p_1 = 4y \quad \text{y} \quad p_2 = 2x + x + 2x + x = 6x \\ 100 = 4y + 6x \end{gathered}$$

De la restricción despejamos la variable y y la sustituimos en la función objetivo.

Para resolver los problemas de optimización de forma general realizaremos los siguientes pasos:

- Crearemos la función objetivo, aquella que el problema nos pide que optimicemos, es decir, que hagamos máxima o mínima, generalmente quedará en función de dos variables x e y.
- Obtendremos la restricción o ecuación de ligadura, que es la relación entre las variables x e y.
- Como la función objetivo dependerá de dos variables, despejaremos una de ellas de la restricción y la sustituiremos en la función objetivo, así solo dependerá de una de las variables.
- A continuación calcularemos sus extremos relativos, para ello le impondremos la condición que $f' = 0$, obteniendo los puntos críticos $x = a$.
- Clasificamos los puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada, así podremos saber si se tratan de un máximo o un mínimo, para ello los sustituimos en $f''\left(x\right)$:
  - Si $f''\left(a\right) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  - Si $f''\left(a\right) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

$$100 = 4y + 6x;\ 100 - 6x = 4y;\ \ y = \frac{100 - 6x}{4} \rightarrow S\left(x\right) = \left(\frac{100 - 6x}{4}\right)^2 + 2x^2$$

Calculamos $A'(x)$.

$$A(x) = \left(\frac{100-6x}{4}\right)^2 + 2x^2 = \left(25 - \frac{3}{2}x\right)^2 + 2x^2$$

$$A'(x) = 2 \cdot \left(25 - \frac{3}{2}x\right)^{2-1} \cdot \left(0 - \frac{3}{2}\right) + 2 \cdot 2x = \cancel{2} \cdot \left(25 - \frac{3}{2}x\right) \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right) + 4x$$

$$= -3 \cdot \left(25 - \frac{3}{2}x\right) + 4x = -75 + \frac{9}{2}x + 4x = -75 + \frac{17}{2}x$$

Imponemos la condición $A'(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} A'(x) & = & -75 + \dfrac{17}{2}x \\ A'(x) & = & 0 \end{array}\right| \quad -75 + \frac{17}{2}x = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$-75 + \frac{17}{2}x = 0; \quad \frac{17}{2}x = 75; \quad 17x = 75 \cdot 2 \rightarrow x = \frac{150}{17}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para verificar que la solución obtenida $x = \dfrac{150}{17}$ sea un mínimo.

$$A'(x) = -75 + \frac{17}{2}x$$

$$A''(x) = 0 + \frac{17}{2} = \frac{17}{2}$$

$$A''\left(\frac{150}{17}\right) = \frac{17}{2} > 0$$

Por tanto para $x = \dfrac{150}{17}$ tenemos nuestro mínimo, sustituimos el valor obtenido en la restricción para determinar el valor de la otra variable.

Para $x = \dfrac{150}{17} \to y = \dfrac{100 - 6 \cdot \dfrac{150}{17}}{4} = \dfrac{200}{17}$

Ahora que ya conocemos de las variables x e y, los sustituimos en la expresiones de p_1 y p_2 para obtener el valor de cada uno de los trozos del alambre que nos pedían.

Para $x = \dfrac{150}{17}$ e $y = \dfrac{200}{17}$ entonces $p_1 = 4 \cdot \dfrac{200}{17} = \dfrac{800}{17}\, m$ y $p_2 = 6 \cdot \dfrac{150}{17} = \dfrac{900}{17}\, m$

Solución:

Las dimensiones de los trozos del alambre que forman un cuadrado y un rectángulo con las condiciones impuestos en el enunciado son $\dfrac{800}{17}\, m$ y $\dfrac{900}{17}\, m$ respectivamente.