Bloque 4: Análisis

Funciones con Parámetros 2011

ESTRUCTURA

Cada documento recoge un tipo de ejercicio de cada uno de los bloques presentes en la prueba de Selectividad de Andalucía ordenados por año. En cada ejercicio os dejo el enunciado junto al examen a que pertenece y a continuación su solución.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto nació sin darme cuenta, empezó como una pequeña ayuda para mis alumnos, pero un día uno de mis estudiantes me dijo “porque no ayudas a más gente” y pensé que si lo compartía a través de las redes llegaría a donde yo no puedo. Todo esto no sería posible sin la ayuda de mi mujer que siempre me ha apoyado en todos mis proyectos, quería agradecerle toda la ayuda, el apoyo y sobre todo la paciencia que ha tenido.

No quiero despedirme sin daros las gracias a vosotros mis queridos lectores que si habéis llegado hasta aquí significa que mi mensaje ha llegado, espero que os sirva de ayuda.

Mr.Wh1t3

TABLA DE CONTENIDO

2011. SUPLENTE SEPTIEMBRE. OPCION A. EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,\ 0)$, y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

Si la ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y = mx + n$, sabemos que se trata de una condición doble.

- $f'(a) = m$, la derivada de f en un punto es la pendiente de la tangente a la curva.
- $f(a) = m \cdot (a) + n$, en $x = a$ la gráfica f y su recta tangente tienen el mismo punto en común.

Si f tiene en $x = a$ un punto de inflexión, sabemos que $f''(a) = 0$.

Para poder determinarla necesitamos obtener el valor de las constantes a, b y c, así que debemos plantear 3 condiciones:

Si tiene un punto de inflexión en $x = 1$ provoca que la segunda derivada sea nula.

$$f''(1) = 0 \tag{1}$$

Si la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es la recta $y = -3x + 3$, entonces para $x = 1$ la derivada de la función coincidirá con la pendiente de la recta tangente, en ese caso tomará el valor de -3 y además para dicho valor de x la función y su recta tangente tendrán el mismo punto en común.

$$f'(1) = -3 \tag{2}$$

$$f(1) = -3 \cdot (1) + 3 = 0 \tag{3}$$

A continuación aplicamos las cuatro condiciones para determinar los valores de a, b y c, pero antes de ello obtendremos la primera y segunda derivada .

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Aplicando las condiciones (1), (2) y (3) obtendremos un sistema de ecuaciones.

Para $f''(1) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} f''(x) &= 6ax + 2b \\ f''(1) &= 6a \cdot 1 + 2b \\ f''(1) &= 0 \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{aligned} 6a \cdot 1 + 2b &= 0 \\ 6a + 2b &= 0 \\ 3a + b &= 0 \end{aligned}$$

Para $f'(1) = -3$:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(1) &= 3a \cdot (1)^2 + 2b \cdot 1 + c \\ f'(1) &= -3 \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{aligned} 3a \cdot (1)^2 + 2b \cdot 1 + c &= -3 \\ 3a + 2b + c &= -3 \end{aligned}$$

Para $f(1) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx \\ f(1) &= a \cdot (1)^3 + b \cdot (1)^2 + c \cdot 1 \\ f(1) &= 0 \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{aligned} a \cdot (1)^3 + b \cdot (1)^2 + c \cdot 1 &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Ahora solo tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por $3a + b = 0$, $3a + 2b + c = -3$ y $a + b + c = 0$.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3a + b &=& 0 \\ 3a + 2b + c &=& -3 \\ a + b + c &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3a \\ 3a + 2b + c &=& -3 \\ a + b + c &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3a \\ 3a + 2 \cdot (-3a) + c &=& -3 \\ a + (-3a) + c &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3a \\ -3a + c &=& -3 \\ -2a + c &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3a \\ -3a + c &=& -3 \\ c &=& 2a \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3a \\ -3a + 2a &=& -3 \\ c &=& 2a \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3a \\ a &=& 3 \\ c &=& 2a \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} b &=& -3 \cdot 3 \\ a &=& 3 \\ c &=& 2 \cdot 3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} b &=& -9 \\ a &=& 3 \\ c &=& 6 \end{array}\right.$$

Solución:

La gráfica de f cumplirá las condiciones indicadas en el enunciado para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 6$.